Conjuntos Relativamente Compactos)

Definición 1. *Un subconjunto A de X es* **relativamente compacto** *en X si su cerradura $\overline{A}$ en X es compacta.*

Los subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.

Corolario 1. *Un subconjunto A de un espacio métrico completo X es relativamente compacto en X si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$)
Sea A relativamente compacto en X. Según resultados anteriores $\overline{A}$ es totalmente acotado y, en consecuencia, que A también lo es.
($\Leftarrow$)
Inversamente, supongamos que A es totalmente acotado. Entonces $\overline{A}$ es totalmente acotado. Por otra parte, como X es completo y $\overline{A}$ en X, se tiene que $\overline{A}$ es completo. Por lo tanto $\overline{A}$ es compacto. □

Sean (K, d_k) un espacio métrico compacto y (X, d_X) un espacio métrico. Consideremos el espacio de funciones continuas

$$C(K, X) = \{f : K \to X \mid f \textit{ es continua}\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty = \max_{z\in K} \; d_X(f(z), g(z))$$

Familias Equicontinuas

Definición 2. *Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C(K, X)$ es equicontinuo en el punto $z_0 \in K$ si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ϵ y de z_0) tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,*

$$d_X(f(z), f(z_0)) < \epsilon \quad si \quad d_K(z, z_0) < \delta$$

$\mathcal{H}$ es equicontinuo si lo es en todo punto punto de K.

Ejemplo Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad en \; C([0, 1], \mathbb{R})$$

Por el teorema del valor medio

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(t)| \; |x - y| \quad t \in (x, y)$$

Como

$$|f_n'(t)| = |t^{n-1}| \leq 1 \; \forall \; t \in [0, 1]$$

tenemos que para $\epsilon > 0$, si $|x - y| < \delta = \epsilon$ entonces

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y| < \epsilon$$

en cada $x \in [0, 1]$ y para todo f_n. Entonces la familia $\{f_n\}$ es equicontinua en cada punto de $[0, 1]$.

Ejemplo Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \quad en\ C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$$

Dada $\delta > 0$ podemos hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\pi}{n} < \delta$. Y tomamos

$$x = -\frac{\pi}{2n}, \quad y = \frac{\pi}{2n}$$

tenemos entonces

$$|x - y| = \left|-\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n}\right| = \left|-\frac{\pi}{n}\right| = \frac{\pi}{n} < \delta$$

tenemos que para $\epsilon = 1$, si $|x - y| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &= |sen(nx) - sen(ny)| \\
&= \left|\operatorname{sen}\left(n\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(n\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
&= |-1 - 1| \\
&= 2 \geq \epsilon = 1
\end{aligned}$$

Entonces la familia $\{f_n\}$ no es equicontinua en $[-\pi, \pi]$.