Familias equicontinuas

Ejercicio Sea (f_k) una sucesión de funciones continuas en $C([a,b],\mathbb{R})$ que tienden puntualmente a f. Si dado $\epsilon > 0$ existe δ (independiente de n) tal que

$$d_{[a,b]}(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f_n(x) - f_n(y)) < \epsilon \quad (\forall\ n) \tag{1}$$

Demostrar que

$$f_n \to f \quad uniformemente\ en\ [a,b]$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ tomemos $\delta > 0$ que satisfaga (1). Consideremos una partición del intervalo $[a,b]$

$$a = x_0, x_1, ..., x_k, ..., x_n = b$$

tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$ para todo k. Como $f_n(x_k) \to f(x_k)$, existe N_k tal que

$$n \geq N_k \quad implica \quad d_{\mathbb{R}}(f_n(x_k) - f(x_k)) < \epsilon$$

Sea $N_0 = \max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$. Si $x \in [a,b]$ entonces $x \in [x_{k-1}, x_k]$ para algún k. Tenemos entonces que para $n \geq N_0$

$$d_{\mathbb{R}}(f_n(x) - f(x)) \leq d_{\mathbb{R}}(f_n(x) - f_n(x_k)) + d_{\mathbb{R}}(f_n(x_k) - f(x_k)) + d_{\mathbb{R}}(f(x_k) - f(x)) < 3\epsilon$$

o sea que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. □

Ejercicio Sea $\mathcal{H} \in C(X,Y)$. Si la familia $\mathcal{H}$ es totalmente acotada, entonces es equicontinua en X.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Debemos mostrar que existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\epsilon)$$

para toda $f \in \mathcal{H}$, y que esta δ no depende de f, sólo de x_0.
Como $\mathcal{H}$ es un conjunto totalmente acotado, existen funciones

$$f_1, f_2, ..., f_n \in C(X,Y)$$

tales que

$$\mathcal{H} \subset B\left(f_1, \frac{\epsilon}{3}\right) \cup B\left(f_2, \frac{\epsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup B\left(f_n, \frac{\epsilon}{3}\right)$$

Además, como cada f_i es continua en x_0, $i = 1, ..., n$, existen $\delta_i > 0$ tales que, para cada i,

$$f_i\left(B(x_0,\delta_i)\right) \subset B\left(f(x_0), \frac{\epsilon}{3}\right)$$

Escogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$, y mostraremos que

$$f_i\left(B(x_0,\delta)\right) \subset B\left(f(x_0),\epsilon\right)$$

para cada $f \in \mathcal{H}$.
Así que sean $f \in \mathcal{H}$ y $x \in B(x_0, \delta)$. Queremos mostrar la desigualdad

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Como

$$\mathcal{H} \subset B\left(f_1, \frac{\epsilon}{3}\right) \cup B\left(f_2, \frac{\epsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup B\left(f_n, \frac{\epsilon}{3}\right)$$

$f \in B\left(f_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ para algún i, es decir

$$d_Y(f(y), f_i(y)) < \frac{\epsilon}{3}$$

Para todo y en X.
Además

$$d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

ya que $d_X(x, x_0) < \delta \leq \delta_i$. Entonces

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_i(x)) + d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) + d_Y(f_i(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\square$