Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. La norma inducida por el producto interno, se define mediante la regla

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Sea V un espacio vectorial con una norma $\| \cdot \|$. La métrica inducida por la norma $\| \cdot \|$, se define mediante la regla

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

En resumen. Un espacio vectorial real o complejo con producto interno $\langle , \rangle$ se puede considerar como un espacio normado con la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

y como un espacio métrico con la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

Ejemplo La suma de funciones y el producto de una función por un escalar, definidos como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad para f, g \in \ C^0[a, b], \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

le dan a $C^0[0, 1]$ la estructura de espacio vectorial.
Hemos visto que $\forall\ f, g \in C[0, 1]$ el espacio de funciones continuas, el producto interior definido como

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f + g)(x)|\ dx\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f - g)(x)|\ dx\right)^2$$

induce la norma

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\ dx = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Usando la norma anterior definimos $\forall\ f, g \in C[0, 1]$ la distancia como

$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\ dx$$

Se tiene que $d(f, g)$ es una métrica.

Demostración. Para $(M1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(f, g) = 0 \ \Leftrightarrow & \ \int_0^1 |f(x) - g(x)|\ dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \ |f(x) - g(x)| = 0\ \forall\ x \in [0, 1] \\ \Leftrightarrow & \ f(x) - g(x) = 0\ \forall\ x \in [0, 1] \\ \Leftrightarrow & \ f(x) = g(x)\ \forall\ x \in [0, 1] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(f, g) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = g(x)\ \forall\ x \in [0, 1]$$

Para $(M2)$ se tiene que

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\ dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)|\ dx = d(g, f)$$

Para $(M3)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|\ dx \\
&= \int_0^1 |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|\ dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\ dx \\
&= \int_0^1 |f(x)-h(x)|\ dx + \int_0^1 |h(x)-g(x)|\ dx \\
&= d(f,h)+d(h,g)
\end{aligned}$$

$\square$

Se tiene entonces que en el espacio $C[0,1]$ de funciones continuas, el producto interior

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f+g)(x)|\ dx\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f-g)(x)|\ dx\right)^2$$

induce la norma

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\ dx = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

que induce la métrica

$$d(f,g) = \|f-g\| = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\ dx$$

Los resultados anteriores se seguirían cumpliendo si en lugar de $f,g\in C[0,1]$ se tiene $f,g\in C[a,b]$ por lo que en el espacio $C[a,b]$ de funciones continuas, el producto interior

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\int_a^b |(f+g)(x)|\ dx\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int_a^b |(f-g)(x)|\ dx\right)^2$$

induce la norma

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\ dx = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

que induce la métrica

$$d(f,g) = \|f-g\| = \int_a^b |f(x)-g(x)|\ dx$$

Ahora bien dado que

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\ dx = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^1\ dx\right)^{\frac{1}{1}}$$

¿Qué pasaría si en el espacio $C[a,b]$ de funciones continuas se define la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Espacios de Funciones

Denotemos por $C^0[a,b]$ al conjunto de todas las funciones continuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
La suma de funciones y el producto de una función por un escalar, definidos como

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad para f,g\in \ C^0[a,b], \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

le dan a $C^0[a,b]$ la estructura de espacio vectorial.
Dada $f\in C^0[a,b]$ definimos

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \ , \quad si \ p\in[1,\infty)$$

Proposición 1. $\|f\|_p$ *es una norma en* $C^0[a,b]$

Demostración. N(1) Para $p\in[1,\infty)$ Se tiene que

$$\|f\|_p^p=\int_a^b |f(x)|^p \ dx=0 \ \Leftrightarrow \ |f(x)|=0 \ \forall \ x\in[a,b] \ \Leftrightarrow \ f=0$$

En consecuencia, $\|f\|_p=0$ si y solo si $f=0$.
N(2) Se tiene

$$\|\lambda f\|_p=\left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\lambda|^p\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\|f\|_p$$

N(3) Necesitamos un resultado
Desigualdad de Hölder para integrales Sean $p,q\in(1,\infty)$ tales que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Entonces, para cualquier par de funciones continuas $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ se cumple que

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \ dx\le\left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

es decir

$$\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$$

Demostración. La afirmación es trivial si $f=0$ o si $g=0$. Supongamos que ambas funciones son distintas de cero. Para cada $x\in[a,b]$, definimos números reales positivos

$$a_x=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b_x=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Aplicando la desigualdad de Young se obtiene

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} = |a_x b_x| \leq \frac{1}{p}a_x^p + \frac{1}{q}b_x^q = \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}$$

e integrando ambos lados de esta desigualdad obtenemos

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| \ dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p \ dx}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q \ dx}{q\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Finalmente, multiplicando ambos lados por $\|f\|_p\|g\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada □

Necesitamos ahora otro resultado Desigualdad de Minkowsky para integrales Sea $p \in [1, \infty]$. Entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \forall \ f, g \in \ C^0[a,b]$$

Demostración. Sea $p \in (1, \infty)$. Si $f = 0$ la afirmación es evidente. Supongamos pues que $f \neq 0$. Sea

$$h(x) = (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para integrales a las funciones f, h y g, h respectivamente, obtenemos

$$\int_a^b |f(x)| \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^{p-1} \ dx \leq \|f\|_p \left(\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |g(x)| \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^{p-1} \ dx \leq \|g\|_p \left(\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

y sumando estas desigualdades concluimos que

$$\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p \ dx \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre

$$\left(\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

y usando la desigualdad del triángulo para números reales

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

y la momotonía de la integral obtenemos

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b \left(|f(x) + g(x)|\right)^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

□