Espacios de Funciones Acotadas

Definición 1. *Una función $f : S \to X$ es acotada si existen $c \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ tales que*

$$d(f(z), x_0) \leq c \quad \forall\ z \in S$$

Denotamos por

$$\mathcal{B}(S, X) = \{f : S \to X \mid f \text{ es acotada}\}$$

y definimos

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S} d(f(z), g(z))$$

Proposición 1. *d_∞ es una métrica en $\mathcal{B}(S, X)$. Esta métrica se llama métrica uniforme*

Demostración. Veamos primero que, si $f, g \in \mathcal{B}(S, X)$, entonces $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$. Sean $x_0, x_1 \in X$ y $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$d(f(z), x_0) \leq c_0 \quad y \quad d(g(z), x_1) \leq c_1 \qquad \forall\ z \in S$$

como d satisface (M3) se tiene

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), x_0) + d(x_0, x_1) + d(x_1, g(z)) \leq c_0 + d(x_0, x_1) + c_1 \qquad \forall\ z \in S$$

En consecuencia $d_\infty \in \mathbb{R}$. Probemos ahora que d_∞ es una métrica para $\mathcal{B}(S, X)$.
Como d satisface (M1) se tiene que

$$d_\infty(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; d(f(z), g(z)) = 0 \;\; \forall\ z \in S \;\Leftrightarrow\; f(z) = g(z) \;\; \forall\ z \in S$$

Es decir, d_∞ satisface (M1).
La propiedad (M3) de d implica que

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), h(z)) + d(h(z), g(z)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \;\; \forall\ z \in S$$

En consecuencia

$$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$$

es decir d_∞ satisface (M3) □

Si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto de todas las funciones de S a V es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad (\lambda f)(z) = \lambda f(z)$$

Si V es un espacio normado con norma $\|\cdot\|$: entonces

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in S} \|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S, V)$.
Para probar éste resultado necesitamos antes algunas proposiciones.

Proposición 2. *Si* $(V, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y* S *es un conjunto, entonces* $f \in \mathcal{B}(S,V)$ *si y solo si, existe* $c \geq 0$ *tal que*

$$\|f(z)\| \leq c, \quad \forall\ z \in S$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{B}(S,V)$, existe $c' > 0$ y $x_0 \in V$ tales que

$$\|f(z) - x_0\| \leq c' \quad \forall\ z \in S$$

por lo tanto

$$\|f(z)\| \leq \|f(z) - x_0\| + \|x_0\| \leq c' + \|x_0\|, \quad \forall\ z \in S$$

Tomando $c \geq c' + \|x_0\|$
Si existe $c \geq 0$ tal que $\|f(z)\| \leq c, \quad \forall\ z \in S$ se tiene entonces

$$\|f(z) - x_0\| \leq \|f(z) - x_0\| + \|x_0\| \leq c + \|x_0\| \quad \forall\ z \in S$$

por tanto existe $x_0 \in V$ y $c' = c + \|x_0\|$ tal que

$$\|f(z) - x_0\| \leq c'$$

y entonces $f \in \mathcal{B}(S,V)$ $\square$

Sean $f,\ g \in \mathcal{B}(S,V)$ y $s,\ t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(st + tg)(z) = (sf)(z) + (tg)(z) = sf(z) + tg(z) \in V, \ \forall\ z \in S$$

de manera que

$$st + tg \in \mathcal{B}(S,V)$$

Se tiene entonces que $\mathcal{B}(S,V)$ es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones definidas sobre S y con valores en V , con las operaciones de suma y producto por un escalar.
Por otro lado, si $f,\ g \in \mathcal{B}(S,V)$, entonces

$$\|(f+g)(z)\| = \|f(z) + g(z)\| \leq \|f(z)\| + \|g(z)\|, \quad \forall\ z \in S$$

Por tanto

$$\|(f+g)(z)\|_\infty = \sup_{z\in S}\|(f+g)(z)\| \leq \sup_{z\in S}\|f(z)\| + \sup_{z\in S}\|g(z)\| = \|f(z)\|_\infty + \|g(z)\|_\infty$$

Lo que prueba la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_\infty$.
Ahora bien

$$\|f(z)\| = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0$$

por lo tanto

$$\|f\|_\infty = 0 \ \Leftrightarrow \ \sup_{z\in S}\|f(z)\| = 0 \ \Leftrightarrow \ f(z) = 0\ \forall\ z \in S \ \Leftrightarrow \ f = 0$$

finalmente

$$\|\lambda f(z)\| = |\lambda|\|f(z)\|$$

por lo que

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{z\in S}\|\lambda f(z)\| = |\lambda|\sup_{z\in S}\|f(z)\| = |\lambda|\|f\|_\infty$$

Subespacios Métricos e Isometrías

Los subconjuntos de un espacios métrico heredan su métrica.

Definición 2. *Si $X = (X, d)$ es un espacio métrico y A es un subconjunto de X definimos*

$$d_A(x, y) = d(x, y) \quad \forall\ x, y \in A$$

Esta es claramente una métrica en A; que se llama la métrica inducida por d. Al conjunto A con esta métrica se le llama un subespacio métrico de X.

Ejemplos

1. El intervslo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la métrica inducida por el valor absoluto

$$d(x, y) = |x - y|$$

es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$

2. El conjunto $(C[a, b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas reales en $[a, b]$ con la distancia inducida

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S} d(f(z), g(z))$$

es un subespacio métrico del conjunto $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones acotadas