Espacios Métricos

Definición 1. *Sea X un conjunto. Una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades*
$M_1)$ $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$
$M_2)$ $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall$ $x, y \in X$
$M_3)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $\forall$ $x, y, z \in X$
A esta última desigualdad se le llama desigualdad del triángulo.

Definición 2. *Un espacio métrico es un conjunto X provisto de una metrica d. Lo denotaremos por (X, d)*

Veamos que la distancia entre dos puntos nunca es negativa

Proposición 1. $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$

Demostración. tenemos que de las propiedades de métrica

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

En consecuencia, $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ □

Proposición 2. *Sea (X, d) un espacio métrico entonces*

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

Demostración. Por M2 y M3 se tiene

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad y \qquad d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z)$$

por lo tanto

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

□

Ejemplo Definimos

$$d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

donde

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Se tiene entonces que d_∞ es una métrica para el espacio Euclidiano

Demostración. Para la propiedad M_1 se tiene

$$\begin{aligned} d_\infty = 0 &\Leftrightarrow \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \; \forall \; i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \; \forall \; i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \; \forall \; i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Para la propiedad M_2 se tiene

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \text{máx}\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} \\ &= \text{máx}\{|y_1-x_1|,\ldots,|y_n-x_n|\} \\ &= d_\infty(y,x) \end{aligned}$$

Para la propiedad M_3 se tiene

$$|x_i-z_i| \leq |x_i-y_i|+|y_i-z_i| \leq d_\infty(x_i,y_i)+d_\infty(y_i,z_i), \quad \forall\ i=1,...,n$$

por lo tanto

$$d_\infty(x,z) \leq d_\infty(x,y)+d_\infty(y,z)$$

$\square$