Productos Escalares y Hermitianos

Definición 1. *Sea E un espacio vectorial, un* ***producto escalar*** *en E es una función de*

$$\langle , \rangle : E \times E \to F$$

donde $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ que a cada par de vectores $x, y \in E$ le asocia un número

$$\langle x, y \rangle$$

que satisface las siguientes propiedades:
1)$\langle x, x \rangle > 0$ *si* $x \neq 0$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *La barra indica conjugación compleja*
3)$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x + y \rangle + \langle y, z \rangle$

Ejemplo El producto escalar usual en $\mathbb{C}^n$ está dado por

$$\langle u, v \rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

comprobar que es en efecto un producto escalar

Demostración. Vamos a comprobar que se cumple $\langle x, x \rangle > 0$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n} \\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vamos a ver que se cumple $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n} \\ &= \overline{v_1\overline{u_1}} + \overline{v_2\overline{u_2}} + \cdots + \overline{v_n\overline{u_n}} \\ &= \overline{v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}} \\ &= \overline{\langle v, u \rangle} \end{aligned}$$

Vamos a ver que se cumple $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda}\langle u, v \rangle$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle u, \lambda v \rangle &= u_1\overline{\lambda v_1} + u_2\overline{\lambda v_2} + \cdots + u_n\overline{\lambda v_n} \\ &= u_1\overline{\lambda}\overline{v_1} + u_2\overline{\lambda}\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{\lambda}\overline{v_n} \\ &= \overline{\lambda}(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}) \\ &= \overline{\lambda}\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Vamos a ver que se cumple $\langle x + y, z \rangle = \langle x + y \rangle + \langle y, z \rangle$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= (u_1 + v_1)\overline{w_1} + (u_2 + v_2)\overline{w_2} + \cdots + (u_n + v_n)\overline{w_n} \\ &= u_1\overline{w_1} + v_1\overline{w_1} + u_2\overline{w_2} + v_2\overline{w_2} + \cdots + u_n\overline{w_n} + v_n\overline{w_n} \\ &= u_1\overline{w_1} + u_2\overline{w_2} + \cdots + u_n\overline{w_n} + v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} + \cdots + v_n\overline{w_n} \\ &= \langle u + w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

□

Espacios Normados

Un producto escalar $\langle , \rangle$ en un espacio vectorial V da lugar a una noción de longitud de un vector $v \in V$, llamada su ***norma***

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una función $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} &N(1) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ &N(2) \quad \|\lambda v\| = \lambda \|v\|, \quad \forall \quad v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &N(3) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall \quad v, w \in V \end{aligned}$$

Ejemplo Sea H un espacio con producto escalar. Entonces la función $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall \, x \in \; H$$

es una norma en H.

Demostración. Supongamos que $x = 0$ entonces

$$\|0\| = \langle 0, 0 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0$$

Ahora supongamos que $\|x\| = 0$ se tiene entonces

$$\|x\| = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \langle 0, 0 \rangle = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0$$

(2) Sea $x \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos entonces que

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = \lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda|^2 \langle x, x \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\langle x, x \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|$$

(3) Para probar esta propiedad necesitamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Desigualdad de Cauchy Schawarz En un espacio vectorial V se cumple

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \; \|w\|$$

Demostración. Consideremos el producto escalar $\langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle$ para obtener

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \langle v, v - \lambda w \rangle + \langle -\lambda w, v - \lambda w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, -\lambda w \rangle + \langle -\lambda w, v \rangle + \langle -\lambda w, -\lambda w \rangle \\ &= \|v\|^2 - \overline{\lambda} \langle v, w \rangle - \lambda \langle w, v \rangle + \lambda \overline{\lambda} \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \overline{\lambda} \langle v, w \rangle - \lambda \overline{\langle v, w \rangle} + \lambda \overline{\lambda} \|w\|^2 \end{aligned}$$

Hacemos

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$$

y se obtiene

$$\leq \|v\|^2 - \overline{\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\right)}\langle v,w\rangle - \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\right)\overline{\langle v,w\rangle} + \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\right)\overline{\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\right)}\|w\|^2$$

Multiplicando por $\|w\|^2$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle - \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$$

por lo que

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|$$

□

Tenemos entonces que para $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2Re\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \langle x,x\rangle + 2\,|\langle x,y\rangle|| + \langle y,y\rangle \\ &\leq \langle x,x\rangle + 2\|x\|\ \|y\| + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

en consecuencia

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Por lo ranto $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ es una norma.

Sea H un espacio con producto escalar. La norma inducida por el producto escalar en H es la norma $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in H$ como

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$