Ejemplo Definimos $\| \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\| \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \quad \forall \, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 1. *la función $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$*

Demostración. I) Dado que $\forall \, x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$, se tiene $\| \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \forall \, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

II) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha\bar{x}\| &= |\alpha x_1| + \ldots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha||x_1| + \ldots + |\alpha||x_n| \\ &= |\alpha|(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ &= |\alpha|\|\bar{x}\| \quad \forall \, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

III) Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\| &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + \ldots + |x_n| + \ldots + |y_1| + \ldots + |y_n| \\ &= \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1 \end{aligned}$$

Si $\|\bar{x}\|_1 = 0$
$\Rightarrow \quad |x_1| + \ldots + |x_n| = 0$ y como cada $|x_i| \geq 0 \; i = 1, \ldots, n$
entonces $|x_1| + \ldots + |x_n| = 0$
$\Rightarrow \quad |x_i| = 0 \; i = 1, \ldots, n$
$\therefore \quad \bar{x} = 0$

□

Proposición 2. *Sea V un espacio espacio vectorial con producto interior. Entonces $\forall \, u, v \in V$ se cumple*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|u\|^2)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle + \langle u - v, u - v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= 2(\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle) \\ &= 2(\|u\|^2 + \|u\|^2) \end{aligned}$$

□

En el caso de la norma definida en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$$

se tiene que para $x = (1, 0)$ y $y = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|(1, 1)\|^2 + \|(1, -1)\|^2 = (|1| + |1|)^2 + (|1| + |-1|)^2 = 8$$

Mientras que

$$2(\|u\|^2 + \|u\|^2) = 2\left(\|(1,0)\|^2 + \|(0,1)\|^2\right) = 2\left((|1| + |0|)^2 + (|0| + |1|)^2\right) = 2(2) = 4$$

por lo tanto

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \neq 2(\|u\|^2 + \|u\|^2)$$

en consecuencia la norma

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$$

no esta inducida por un producto interior.
Dada una norma, se puede decidir si proviene o no de un producto interno, ya que éste se puede recuperar a partir de su norma asociada:

Proposición 3. *Identidad de Polarización* *Sea* $(V, \langle , \rangle)$ *un espacio vectorial con producto interno. Entonces para cada* $u, w \in V$ *se cumple:*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2$$

Demostración. Si V es un espacio vectorial entonces

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v - w\|^2 &= \langle v - w, v - w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2 = \frac{1}{2}\langle v, w\rangle - \left(\frac{-1}{2}\right)\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle$$

□

Ejemplo En $\mathbb{R}^n$ se define la norma $\forall\ x$ como

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

vamos a aplicar la identidad de polarización para recuperar el producto interior que la induce, en este caso para $u, v \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2\right) - \frac{1}{4}\left((v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - v_n)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\left((u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2\right) - \left((v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - v_n)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)\right] \\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n
\end{aligned}$$

Ejemplo En el espacio $C[0,1]$ se define la norma

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\ dx$$

usando la identidad de polarización vamos a recuperar el producto interior que la induce, en este caso

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \frac{1}{4}\|f+g\|^2 - \frac{1}{4}\|f-g\|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f+g)(x)|\ dx\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(f-g)(x)|\ dx\right)^2\end{aligned}$$

En el caso de que $f = g$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |(2f)(x)|\ dx\right)^2\\ &= \left(\int_0^1 |f(x)|\ dx\right)^2\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\ dx = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

y la norma es inducida por un producto interior

Métricas Inducidas por Normas

En un espacio vectorial X toda norma induce una métrica

Proposición 4. *Si X es un espacio normado*

$$d_2(x,y) = \|x-y\|$$

define una métrica

Demostración. Tenemos que

$$d_2(x,y) = \|x-y\| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d_2(x,y) \geq 0$$

$$d_2(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d_2(y,x)$$

$$d_2(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d_2(x,y) + d_2(x,z)$$

□

Proposición 5. *Todo espacio vectorial con producto interno se puede dotar de una métrica d con las siguientes propiedades*

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$$

Demostración. Podemos tomar la norma inducida

$$d_2(x,y) = \|x-y\| = \|x+z-z-y\| = \|x+z-(y+z)\| = d_2(x+z,y+z)$$

$$d_2(\alpha x,\alpha y) = \|\alpha x-\alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\|x-y\| = |\alpha| d_2(x,y)$$

□

Ejemplo Demostrar que la metrica definida por $d(a,b) = \begin{cases} 0 & a=b \\ 1 & a\neq b \end{cases}$ satisface los axiomas de métrica.

Demostración :

1. Sean $a,b \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ entonces $d(a,b)=1$ ó $d(a,b)=0$ $\therefore$ $d(a,b)\geq 0$
2. Sean $a,b \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ Si $\bar{a}\neq\bar{b}$ $d(\bar{a},\bar{b})=1$ y si $\bar{b}\neq\bar{a}$ $d(b,a)=1$ $\therefore$ $d(a,b)=1=d(b,a)$
   Ahora bien si $a=b$ entonces $d(a,b)=0\overset{*}{=}d(b,a)$
   * Si $a=b$ entonces $b=a$ por lo tanto $d(b,a)=0$
3. Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ $\bar{a}\neq\bar{b}\neq\bar{c}$
   $d(\bar{a},\bar{b})=1$, $d(\bar{b},\bar{c})=1$ y

$$d(\bar{a},\bar{b})=1$$

$\therefore$ $d(a,c)=1\leq 1+1=d(a,b)+d(b,c)$

Ejercicio Probar que la métrica discreta en un espacio vectorial no trivial X no puede obtenerse de una norma

Demostración. Tenemos que la métrica discreta esta definida por

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & a=b \\ 1 & a\neq b \end{cases}$$

vamos a ver que no cumple $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$, sea $\alpha=2$ en este caso

$$si \quad x\neq y \quad entonces \quad d(\alpha x,\alpha y)=1\neq 2=\alpha d(x,y)$$

por lo tanto la métrica discreta no es inducida por una norma □

Ejemplo Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$. La norma inducida por el producto interno, se define mediante la regla

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Sea V un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. La métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$, se define mediante la regla

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

En resumen. Un espacio vectorial real o complejo con producto interno $\langle,\rangle$ se puede considerar como un espacio normado con la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

y como un espacio métrico con la métrica

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$