Guía para el tercer examen parcial

1.-Sea A un subconjunto de X. Investiga si es falsa o verdadera cada una de las siguientes afirmaciones

a) Si A es acotado, entonces A es totalmente acotado

b) Si A es totalmente acotado, entonces es compacto

c) Si A es totalmente acotado, entonces A es relativamente compacto en X

d) Si A es relativamente compacto en X, entonces A es totalmente acotado

e) Si X es compacto, entonces A es relativamente compacto en X

2.-Prueba que un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión en X contiene una subsucesión convergente
3.-Prueba que si $\phi : X \to Y$ es una función uniformemente continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y.
4.-¡Es cierto, que si $\phi : X \to Y$ es continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y ? Demuestra tu afirmación
5.-Prueba que los subconjuntos totalmente acotados de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados
6.-Sea $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_k(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{t + 4\pi^2 k^2})$$

Demuestra que el conjunto

$$\mathcal{H} = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

es equicontinua