Integral de Riemann-Stieltjes

Integral de Riemann Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada. Si

$$P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$$

es una partición de $[a, b]$. Llamamos $|P| = \text{máx}\{(t_i - t_{i-1})\}$ norma de la partición.
Una suma de la forma

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

es una suma de Riemann.
Se dice que una función f acotada, deifinida en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un núero r tal que $\forall\ \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|R(f, P) - r| < \epsilon$$

para cada suma de Riemann asociada a una partición P tal que $|P| < \delta$. A tal número r se le denota

$$(R) \int_a^b f(x)\ dx$$

Integral de Daoroux Si

$$P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$$

es una partición de $[a, b]$.
Se denota

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

llamamos suma inferior de f con respecto a P a la suma

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

llamamos suma superior de f con respecto a P a la suma

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

La integral inferior de Darboux sobre $[a, b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f, P)\}$$

La integral superior de Darboux sobre $[a, b]$ se define

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\overline{S}(f, P)\}$$

Se dice que una función f acotada, deifinida en $[a, b]$ es Darboux integrable en $[a, b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

y la denotamos

$$(D) \int_a^b f(x)\, dx$$

Integral de Riemann-Stieltjes Sean f y F dos funciones acotadas definidas en $[a, b]$.
Una suma de la forma

$$R_F(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(F(t_i) - F(t_{i-1}) \quad con \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

se denomina suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a F.
Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a, b]$ y escribimos $f \in R_S(F)$ en $[a, b]$ si existe un número I tal que $\forall\ \epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de $[a, b]$ tal que para toda partición más fina P de P_ϵ y para todo $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ se cumple

$$|R_F(f, P) - I| < \epsilon$$

El número I si existe es llamado la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto F en $[a, b]$ y escribimos

$$(RS) \int_a^b f(x)\ d\ F(x)$$

En el caso de que $F(x) = x$ se tiene el caso particular de la integral de Riemann.

Teorema 1. *Sea f una función real acotada sobre $[a, b]$. Si F es de clase C^1 sobre $[a, b]$ y $f \in R_S(F)$, fF' es integrable Riemann y se cumple*

$$\int_a^b f(x)\ d\ F(x) = \int_a^b f(x)\ F'(x)\ dx$$

Demostración. Sea $h = fF'$. Si

$$P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$$

y consideremos la suma de Riemann

$$\begin{aligned} R(h, P) &= \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Ahora consideremos la suma de Riemann-Stieltjes

$$\begin{aligned} R_F(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(F(t_i) - F(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)F'(\xi_i^*)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

En la última igualdad aplicamos el teorema del valor medio a la función F y obtenemos

$$F(t_i) - F(t_{i-1}) = F'(\xi_i^*)(t_i - t_{i-1}) \ \ con \ \ \xi_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} |R_F(f,P) - R_(h,P)| & \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)F'(\xi_i^*)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)](t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \ \ |[F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)]| \ \ (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

como f es acotada existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \ \ \forall\, x \in [a,b]$. De manera que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \ \ |[F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)]| \ \ (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M \ \ |[F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)]| \ \ (t_i - t_{i-1})$$

Por otro lado si F es de clase C^1 entonces es uniformemente continua en $[a,b]$ por tanto $\forall\ \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\xi_i^* - \xi_i| < \delta \quad \Rightarrow \ |F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)| < \frac{\epsilon}{2M(b-a)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |R_F(f,P) - R_(h,P)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \ \ |[F'(\xi_i^*) - F'(\xi_i)]| \ \ (t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} M \ \frac{\epsilon}{2M(b-a)} \ (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Por otro lado si $f \in R_S(F)$ en $[a,b]$ existe una partición P_ϵ tal que si P es un refinamiento de P_ϵ entonces

$$\left| R_F(f,P) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si tomamos $Q = P \cup P_\epsilon$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left| R(h,P) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| &= \left| R(h,P) - R_F(f,P) + R_F(f,P) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| \\
&\leq |R(h,P) - R_F(f,P)| + \left| R_F(f,P) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

Ejemplo Calcular $\int_1^7 f(x)\ dF(x)$ para $f(x) = x^2$ y $F(x) = \ln(x)$

En este caso

$$\int_1^7 f(x)\ dF(x) = \int_1^7 x^2\ d(\ln(x)) = \int_1^7 x^2\ \left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \int_1^7 x\ dx = \frac{x^2}{2}\ |_1^2 = \frac{49}{2} - \frac{1}{2} = 24$$