Propiedades de la Integral de Riemann-Stieltjes

Definición 1. *Sean f y F dos funciones acotadas definidas en $[a,b]$.*
Una suma de la forma

$$R_F(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(F(t_i)-F(t_{i-1})) \quad con \quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i]$$

se denomina suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a F.
Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ y escribimos $f\in R_S(F)$ en $[a,b]$ si existe un número I tal que $\forall\ \epsilon>0$ existe una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que para toda partición más fina P de P_ϵ y para todo $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ se cumple

$$|R_F(f,P)-I|<\epsilon$$

El número I si existe es llamado la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto F en $[a,b]$ y escribimos

$$I=\int_a^b f(x)\ d\ F(x)$$

Proposición 1. *Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, y sean f y g funciones reales acotadas en $[a,b]$. Si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a g en $[a,b]$, entonces el número I es único*

Demostración. Supongamos que I_1 y I_2 dos elecciones para I. Dado $\epsilon>0$, entonces existe una partición P_ϵ tal que P'_ϵ de $[a,b]$ tal que

$$|R_F(f,P)-I_1|<\frac{\epsilon}{2}$$

para cada partición P que refine a P_ϵ y toda suma de Riemann-Stieltjes asociada a f, g, y P y

$$|R_F(f,P)-I_2|<\frac{\epsilon}{2}$$

para cada partición P que refine a P'_ϵ y toda suma de Riemann-Stieltjes asociada a f, g, y P.
Elegimos $P=P_\epsilon\cup P'_\epsilon$ y tenemos entonces

$$|I_1-I_2|=|I_1-R_F(f,P)+R_F(f,P)-I_2|\le|I_1-R_F(f,P)|+|R_F(f,P)-I_2|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

por tanto concluimos que $I_1=I_2$ $\square$

Teorema 1. *Criterio de Cauchy para integrabilidad. La función f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ si y sólo si para cada $\epsilon>0$ hay una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que si P y Q son refinamientos de P_ϵ y si $R_F(f,P)$ y $R_F(f,Q)$ son cualesquiera sumas Riemann-Stieltjes correspondientes, entonces*

$$|R_F(f,P)-R_F(f,Q)|<\epsilon$$

Demostración. Si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$, existe una partición P_ϵ tal que si P y Q son refinamientos de P_ϵ y si $R_F(f,P)$ y $R_F(f,Q)$ son cualesquiera sumas Riemann-Stieltjes correspondientes, entonces

$$\left|R_F(f,P)-\int_a^b f(x)\ dF(x)\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

$$\left| R_F(f,Q) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|R_F(f,P) - R_F(f,Q)| &= \left| R_F(f,P) - R_F(f,Q) - \int_a^b f(x)\ dF(x) + \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| \\
&\leq \left| R_F(f,P) - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| + \left| \int_a^b f(x)\ dF(x) - R_F(f,Q) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Inversamente, supongamos que la condición de que para cada $\epsilon > 0$ hay una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que si P y Q son refinamientos de P_ϵ y si $R_F(f,P)$ y $R_F(f,Q)$ son cualesquiera sumas Riemann-Stieltjes correspondientes, entonces

$$|R_F(f,P) - R_F(f,Q)| < \epsilon$$

Entonces para cada entero positivo k consideremos la partición P_k tal que

$$|R_F(f,P) - R_F(f,Q)| < \frac{1}{k}$$

si P y Q son refinamientos de P_k y si $R_F(f,P)$ y $R_F(f,Q)$ son cualesquiera sumas Riemann-Stieltjes correspondientes.
Definimos

$$\hat{P}_n = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$$

notemos que $\hat{P}_n$ refina a P_k para todo $1 \leq k \leq n$.
Definimos

$$R_F(f,\hat{P}_n) \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Sea $\epsilon > 0$ dado, y elegimos un número entero positivo N suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$.
Si $n > m > N$ entonces

$$|R_F(f,P_n) - R_F(f,P_m)| < \frac{1}{N} < \epsilon$$

esto significa que la sucesión

$$\{R_F(f,P_n)\}$$

es de Cauchy, y es por tanto convergente

$$\lim_{n\to\infty} R_F(f,P_n) = I$$

Ahora bien sea $\epsilon > 0$ elegimos un entero positivo N tal que

$$\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |R_F(f,P_n) - I| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si P es un refinamiento de $\hat{P}_n$ y sea $R_F(f,P)$ una suma de Riemann-Stieltjes asociada a f y F, entonces

$$\begin{aligned}
|R_F(f,P) - I| &\leq |R_F(f,P) - R_F(f,P_n) + R_F(f,P_n) - I| \\
&\leq |R_F(f,P) - R_F(f,P_n)| + |R_F(f,P_n) - I| \\
&< \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

□