Integral de Riemann-Stieltjes según una funcion escalonada

Definición 1. *Sea F una función acotada y definida en $[a,b]$ de tal manera que sea discontinua en un número finito de puntos P de $[a,b]$*

$$a \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq b$$

*si la función F es constante en cada intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) se dice que F es una **función escalonada**. Y el número*

$$S_i = F(t_i^+) - F(t_i^-)$$

se llama salto en t_i.
Si $t_1 = a$ el salto en t_1 es $S_1 = F(t_1^+) - F(t_1)$
Si $t_p = b$ el salto en t_p es $S_p = F(t_p) - F(t_p^-)$
Donde

$$F(t_i^+) = \lim_{x \to t_i^+} F(x)$$

$$F(t_i^-) = \lim_{x \to t_i^-} F(x)$$

Teorema 1. *Dados $a < c < b$. Definimos F en $[a,b]$ como sigue: los valores $F(a)$, $F(c)$, $F(b)$ son arbitrarios;*

$$F(x) = \begin{cases} F(a) & si \quad a \leq x < c \\ \\ F(b) & si \quad c < x \leq b \end{cases}$$

Sea f definida en $[a,b]$ de manera que por lo menos una de las funciones f ó F sea continua por la izquierda en c y una por lo menos sea continua por la derecha de c. Entonces f es Riemann-Stieltjes integrable en $[a,b]$ y tenemos

$$\int_a^b f(x)\ dF(x) = f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]$$

Demostración. Si $c \in P$, todo término de la suma $R_F(f,P)$ es nulo salvo los dos términos precedentes del subintervalo que contiene a por c, pongamos pues

$$R_F(f,P) = f(t_{i-1})[F(c) - F(c^-)] + f(t_i)[F(c^+) - F(c)]$$

donde $t_{i-1} \leq c \leq t_i$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)] &= f(t_{i-1})[F(c) - F(c^-)] + f(t_i)[F(c^+) - F(c)] - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)] \\ &= f(t_{i-1})F(c) - f(t_{i-1})F(c^-) + f(t_i)F(c^+) - f(t_i)F(c) - f(c)F(c^+) + f(c)F(c^-) \end{aligned}$$

Agregamos un cero adecuado

$$f(t_{i-1})F(c) - f(t_{i-1})F(c^-) + f(t_i)F(c^+) - f(t_i)F(c) - f(c)F(c^+) + f(c)F(c^-)$$

$$\begin{aligned} &= f(t_{i-1})F(c) - f(t_{i-1})F(c^-) + f(t_i)F(c^+) - f(t_i)F(c) - f(c)F(c^+) + f(c)F(c^-) + f(c)F(c) - f(c)F(c) \\ &= [f(t_{i-1}) - f(c)]F(c) - [f(t_{i-1}) - f(c)]F(c^-) + [f(t_i) - f(c)]F(c^+) - [f(t_i) - f(c)]F(c) \\ &= [f(t_{i-1}) - f(c)]\ [F(c) - F(c^-)] + [f(t_i) - f(c)]\ [F(c^+) - F(c)] \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| &= |[f(t_{i-1}) - f(c)]\ [F(c) - F(c^-)] + [f(t_i) - f(c)]\ [F(c^+) - F(c)]| \\ &= |f(t_{i-1}) - f(c)|\ |F(c) - F(c^-)| + |f(t_i) - f(c)|\ |F(c^+) - F(c)|\end{aligned}$$

Si f es continua en c, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implica

$$|f(t_{i-1}) - f(c)| < \epsilon \quad y \quad |f(t_i) - f(c)| < \epsilon$$

En este caso, obtenemos la desigualdad

$$|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| \leq \epsilon\ |F(c) - F(c^-)| + \epsilon\ |F(c^+) - F(c)|$$

pero esta desigualdad es válida sea f continua ó no en c por ejemplo, si f es discontinua a la derecha y a la izquierda de c, entonces $F(c) = F(C^-)$ y $F(c) = F(c^+)$ y conseguimos que

$$|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| = 0$$

Por otra parte, si f es continua a la izquierda y discontinua a la derecha de c, debemos tener $F(c) = F(c^+)$ y obtenemos

$$|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| \leq \epsilon\ |F(c) - F(c^-)|$$

Análogamente, si f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda de c, debemos tener $F(c) = F(c^-)$ y obtenemos

$$|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| \leq \epsilon\ |F(c^+) - F(c)|$$

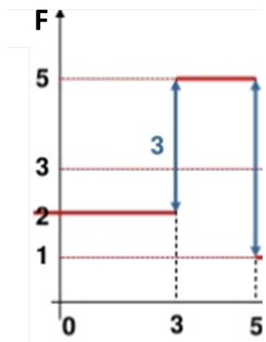
la desigualdad

$$|R_F(f,P) - f(c)\ [F(c^+) - F(c^-)]| \leq \epsilon\ |F(c) - F(c^-)| + \epsilon\ |F(c^+) - F(c)|$$

es válida en cualquier caso □

Ejemplo Calcular $\int_0^5 f(x)\ dF(x)$ para $f(x) = x^2$ y

$$F(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq 3 \\ 5 & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$$



Solución En este caso

$$\int_0^5 x^2 dF(x) = f(3)[F(3^+) - F(3^-)] = 9[\lim_{x\to 3^+} F(x) - \lim_{x\to 3^-} F(x)] = 9[5-2] = 9(3) = 27$$