Integral por partes de Riemann-Stieltjes

Teorema 1. *Si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ entonces también F es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a f en $[a,b]$ y se cumple*

$$\int_a^b f(x)\ dF(x) + \int_a^b F(x)\ df(x) = f(b)F(b) - f(a)F(a)$$

Demostración. Como f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que para todo refinamiento P de P_ϵ y toda elección $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F(t_i) - F(t_{i-1})] - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| < \epsilon$$

con la misma partición P formamos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')[f(t_i) - f(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')f(t_i) - F(\xi_i')f(t_{i-1}) \tag{1}$$

Por otro lado escribimos

$$H = f(b)F(b) - f(a)F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)F(t_i) - f(t_{i-1})F(t_{i-1}) \tag{2}$$

a la expresión (2) le restamos (1) y obtenemos

$$\begin{aligned} H - \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')[f(t_i) - f(t_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)F(t_i) - f(t_{i-1})F(t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')f(t_i) - F(\xi_i')f(t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[F(t_i) - F(\xi_i')] + f(t_{i-1})[F(\xi_i') - F(t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{2n} f(x_i')[F(t_i') - F(t_{i-1}')] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H - \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')[f(t_i) - f(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{2n} f(x_i')[F(t_i') - F(t_{i-1}')]$$

el lado derecho existe y tiende a $\int_a^b f(x)\ dF(x)$, por tanto

$$\left| H - \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i')[f(t_i) - f(t_{i-1})] - \int_a^b f(x)\ dF(x) \right| < \epsilon$$

esto prueba la existencia de

$$\int_a^b F(x)\ df(x)$$

y su valor es

$$H - \int_a^b f(x)\ dF(x)$$

de manera que

$$H - \int_a^b f(x)\ dF(x) = \int_a^b F(x)\ df(x)$$

es decir

$$H = \int_a^b f(x)\ dF(x) + \int_a^b F(x)\ df(x)$$

por lo tanto

$$f(b)F(b) - f(a)F(a) = \int_a^b f(x)\ dF(x) + \int_a^b F(x)\ df(x)$$

□