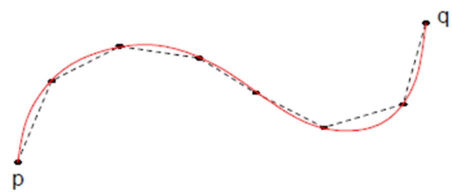
Subespacios Métricos e Isometrías

Definición 1. *Dado un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y dos puntos $p, q \in X$. Una trayectoria de p a q en X es una fución continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma(1) = q \quad y \quad \sigma(t) \in X \quad \forall\, t \in [0,1]$$



donde $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ denota la distancia de x a y.
Observación:

$$\|p - q\| \leq L(\sigma)$$

Definición 2. *La longitud de una trayectoria se define como*

$$L(\sigma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} \|\sigma(t_{k-1}) - \sigma(t_k)\| \mid 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1,\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

Ejemplo Sean $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $x, y \in S^{n-1}$. Consideremos el conjunto $T_{xy}(S^{n-1})$ de todas las trayectorias de x a y en S^{n-1}.
Definimos

$$d(x,y) = \text{ínf }\ \{\pounds(\sigma)\ \sigma \in\ T_{x,y}(S^{n-1})\ \}$$

donde $\pounds(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria σ. Ésta es una métrica en S^{n-1}

Solución Sean $x, y, z \in X$, y sean $\sigma_{x,y}$ y $\sigma_{y,z}$ trayectorias de x a y, y de y a z, respectivamente, en X de longitud finita. Entonces, definimos

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_{x,y}(2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_{y,z}(2t-1) & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

σ es una trayectoria de x a z en X de longitud finita. Por otro lado si

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1 \ \in\ P[0,1]$$

entonces

$$0 \leq \frac{1}{2}t_0 \leq \frac{1}{2}t_1 \leq \cdots \leq \frac{1}{2}t_m = \frac{1}{2} \ \in\ P_{[0,\frac{1}{2}]}$$

Y reciprocamente, si

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = \frac{1}{2} \ \in\ P_{[0,\frac{1}{2}]}$$

entonces

$$0 \leq 2t_0 \leq 2t_1 \leq \cdots \leq 2t_m = 1 \ \in\ P_{[0,1]}$$

En consecuencia

$$\pounds(\sigma_{x,y}) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}\|\sigma_{x,y}(2t_{k-1}) - \sigma_{x,y}(2t_k)\| \mid 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = \frac{1}{2}\right\}$$

Análogamente

$$\pounds(\sigma_{y,z}) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}\|\sigma_{y,z}(2t_{k-1} - 1) - \sigma_{y,z}(2t_k - 1)\| \mid \frac{1}{2} \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1\right\}$$

Por otra parte, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1$ es una partición del intervalo $[0,1]$ y si tomamos $0 < j \leq m$ tal que $t_{j-1} \leq \frac{1}{2} \leq t_j$, se tiene

$$\|\sigma(t_{j-1}) - \sigma(t_j)\| \leq \left\|\sigma(t_{j-1}) - \sigma\left(\frac{1}{2}\right)\right\| + \left\|\sigma\left(\frac{1}{2}\right) - \sigma(t_j)\right\|$$

de donde

$$d(x,z) \leq \pounds(\sigma) \leq \pounds(\sigma_{x,y}) + \pounds(\sigma_{y,z})$$

Consecuentemente

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Lo que prueba la desigualdad triangular.
Para probar simetría, note que $\sigma : [0,1] \to X$ es una trayectoria de x a y (cualesquiera puntos de $\mathbb{R}^n$), entonces $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$ es una trayectoria de y a x. Y además,

$$\pounds(\sigma) = \pounds(\widetilde{\sigma})$$

En consecuencia

$$d(x,y) = d(y,x)$$

Finalmente, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, dado que

$$\|x - y\| \leq \pounds(\sigma)$$

para cualquier trayectoria σ de x a y, se sigue que

$$\|x - y\| \leq d(x,y)$$

Así que si $d(x,y) = 0$, entonces $x = y$.