Isometrías

Definición 1. *Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ dos espacios métricos. Una función $\phi : X \to Y$ es una isométria si*

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(\phi(x_1), \phi(x_2)) \ \ \forall \ x_1, x_2 \in X$$

Teorema 1. *Sea Y un espacio vectorial normado con norma $\| \cdot \|_Y$, y sea X un espacio vectorial. Si $f : X \to Y$ es una aplicación lineal, esto es, para todo x_1, x_2 en X, y cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

y si para todo $x \in X$ se cumple

$$f(x) = 0_y \ \Rightarrow \ x = 0_x$$

entonces

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y$$

para todo $x \in X$, es una norma en X.

Demostración. Como f es lineal,

$$f(0_X) = f(0_X + 0_X) = f(0_X) + f(0_X) = 2f(0_X)$$

Esto es $f(0_X) = 0_Y$. Se sigue que para toda $x \in X$,

$$\|x\|_X = 0 \ \Leftrightarrow \ \|f(x)\|_Y = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = 0_Y \ \Leftrightarrow \ x = 0_X$$

Por otra parte, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\|_X = \|f(\lambda x)\|_Y = \|\lambda f(x)\|_Y = |\lambda| \|f(x)\|_Y = |\lambda| \|x\|_X$$

Finalmente, para todo $x_1, x_2 \in X$

$$\|x_1 + x_2\|_X = \|f(x_1 + x_2)\|_Y = \|f(x_1) + f(x_2)\|_Y \leq \|f(x_1)\|_Y + \|f(x_2)\|_Y = \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$$

$\square$

Definición 2. *Si X y Y son espacios vectoriales normados con normas $\| \cdot \|_X$ y $\| \cdot \|_Y$ repestivamente, decimos que una función $\phi : X \to Y$ es una isometría si ϕ es una isometría respecto a las métricas inducidas por las respectivas normas en X y Y.*

Proposición 1. *Si X y Y son espacios vectoriales normados con normas $\| \cdot \|_X$ y $\| \cdot \|_Y$ respectivamente y si $\phi : X \to Y$ es una función lineal, entonces ϕ es una isometría si y solo si,*

$$\|x\|_X = \|\phi(x)\|_Y, \quad \forall \ x \in X$$

Demostración. Según lo anterior $\phi(0_X) = 0_Y$.
Ahora, si ϕ es una isometría, para toda $x \in X$,

$$\|x\|_X = d_X(x, 0_X) = d_Y(\phi(x), \phi(0_Y)) = d_Y(\phi(x), 0_Y) = \|\phi(x)\|_Y$$

Reciprocamente si la igualdad

$$\|x\|_X = \|\phi(x)\|_Y, \quad \forall\ x \in X$$

es válida para todo $x, y \in X$,

$$d_X(x,y) = \|x-y\|_X = \|\phi(x-y)\|_Y = \|\phi(x)-\phi(y)\|_Y = d_Y(\phi(x),\phi(y))$$

$\square$

Ejemplo Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1,...,e_n\}$ una base de V. Expresamos a cada $v \in V$ como

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

y definimos

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces la función $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ dada por

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

es una isometría

Demostración. Vamos a probar que

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ a V, ya que por definición

$$\|\phi(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| = \|(x_1, ..., x_n)\|$$

para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Notamos que para todos $(x_1, ..., x_n)$ y $(y_1, ..., y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\phi((x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)) &= \phi(x_1+y_1,...,x_n+y_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\\ &= \phi(x_1,...,x_n)+\phi(y_1,...,y_n)\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2. *Toda isometría es inyectiva*

Demostración. Si $\phi : X \to Y$ es una isométria entonces

$$\phi(x) = \phi(y) \;\Rightarrow\; 0 = d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y) \;\Rightarrow\; d_X(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y$$

□

Proposición 3. *Si $\phi : X \to Y$ es una isometría y es biyectiva, entonces su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es una isometría.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y sean $x_1, x_2 \in X$ únicos tales que $y_1 = \phi(x_1)$ y $y_2 = \phi(x_2)$ se tiene entonces

$$d_Y(y_1, y_2) = d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) = d_X(\phi^{-1}(y_1), \phi^{-1}(y_2))$$

□

Proposición 4. *Si $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ son isometrías y son biyectivas entonces la función $\psi \circ \phi : X \to Z$ es una isometría*

Demostración. Tenemos que

$$d_z(\psi \circ \phi(x_1), \psi \circ \phi(x_2)) = d_z(\psi(\phi(x_1)), \psi(\phi(x_2))) = d_y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_x(x_1, x_2)$$

□

Proposición 5. *Si (X, d) y (Y, e) so espacios métricos, escribimos $(X, D) \simeq (Y, e)$ si existe una iosmetría de (X, d) a (Y, e). Se tiene que para todos los espacios métricos (X, d), (Y, e) y (Z, m) se cumple*

$$\begin{aligned}
&(X, d) \simeq (X, d)\\
&(X, d) \simeq (Y, e) \Rightarrow (Y, e) \simeq (X, d)\\
&(X, d) \simeq (Y, e) \text{ y } (Y, e) \simeq (Z, m) \;\Rightarrow\; (X, d) \simeq (Z, m)
\end{aligned}$$

Demostración. Se tiene que la función identidad de (X, d) en (X, d) es una isometría por lo que

$$(X, d) \simeq (X, d)$$

Si $\phi : X \to Y$ es una isometría de (X, d) en (Y, e) entonces la función $\phi^{-1} : Y \to X$ es una isometría de (Y, e) en (X, d) por lo que

$$(Y, e) \simeq (X, d)$$

Finalmente si $\phi : X \to Y$ es una isometría de (X, d) en (Y, e) y $\psi : Y \to Z$ es una isometría de (Y, e) en (Z, m) la función $\psi \circ \phi : X \to Z$ es una isometría de (X, d) en (Z, m) por lo que

$$(X, d) \simeq (Y, e) \text{ y } (Y, e) \simeq (Z, m) \;\Rightarrow\; (X, d) \simeq (Z, m)$$

□