Tarea 1 fecha de entrega 16 de febrero 2018

1.-Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son dos espacios métricos, probar que en el espacio producto $X = X_1 \times X_2$ se pueden definir las métricas siguientes

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$$\overline{d}(x, y) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

dende $x = (x_1, y_1)$, $y = (y_1, 2_1) \in X$
2.-Sea f una función estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$
(a) Pruébese que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica
3.-Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera $w, x, y, z \in X$, se cumple que

$$|d(w, x) - d(y, z)| \leq d(w, y) + d(x, z)$$

4.- Prueba que

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una norma en $\mathbb{R}^n$
5.-Es la función $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(x) = \text{mín}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

una norma en $\mathbb{R}^n$
6.-Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ p \in\ [1, \infty)$$

Muestre que la desigualdad

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

no se cumple para $p = \dfrac{1}{2}$
7.-Prueba que para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|x\|_r \leq \|x\|_s \quad si \quad 1 \leq s \leq r \leq \infty$$