Tarea 3 fecha de entrega 2 de marzo 2018

1.Sean $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados, y sea $L : V \to W$ una transformación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. L es continua
2. L es continua en 0
3. Existe $c > 0$ tal que $\|Lv\|_W \leq c\ \|v\|_V$, para todo $v \in V$
4. L es Lipchitz continua

2.-Dadas las constantes reales $a,\ b$ pruebe que la función $\sigma_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\sigma_{a,b}(x, y) = ax + by, \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es continua.
3.-Dado un espacio métrico (X, d_X), si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, pruebe que la función $\psi : X \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(x) = (f(x), g(x))$$

para toda $x \in X$, es continua
4.-Sea $g_0 \in C[a, b]$. Prueba que, para toda $p \in [1, \infty)$, la función $\phi : C_p[a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(f) = \int_a^b f\ g_0$$

es Lipchitz continua. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Hölder para integrales)
5.-Prueba que, para toda $p \in [1, \infty]$, la k-ésima proyección

$$\pi_k : \ell_p \to \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k$$

con $x = (x_k) \in \ell_p$, es Lipchitz continua