Tarea 4 fecha de entrega 9 de marzo 2018

1.-En $\mathbb{R}$ definimos la distancia

$$d(a,b) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$$

(a) Determinar las bolas abiertas.
2.-Probar que la cerradura $\overline{B(x_0,\epsilon)}$ de una bola abierta $B(x_0,\epsilon)$ en un espacio métrico puede ser distinta de la bola cerrada $\overline{B}(x_0,\epsilon)$
3.-Demostrar que si X es un espacio métrico, $A \subset X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$V_r = \{x \in X \mid d(x,A) \leq r\}$$

es cerrado.
Donde

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

4.-Para $a < b \in \mathbb{R}$ sea $X = C[a,b]$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Se define el conjunto

$$O = \{f \in X \mid \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$$

pruebe que el conjunto O es abierto.
5.-Demuestre que para cada familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico se cumple

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$$

6.-Demuestre las siguientespropiedades del interior de un conjunto:

1. Int$(A \cap B)$=Int(A)$\cap$ Int(B)
2. Int(A^c)=$(\overline{A})^c$
3. $(Int(A))^c = \overline{A^c}$
4. Es cierto que $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int(B)$ para A, B arbitrarios

7.-Sean X, Y espacios métricos y sea $\phi : X \to Y$ una función. Demuestre que ϕ es continua si y solo si

$$\overline{\phi^{-1}(B)} \subset \phi^{-1}(\overline{B})$$

para cada $B \subset Y$