Medida de Lebesgue

Definición 1. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se dice que es Lebesgue medible si para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, se cumple*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Si un conjunto es Lebesgue medible, entonces la medida de Lebesgue del conjunto es su medida exterior. Dado que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

se satisface por la propiedad de subaditividad, sólo se debe verificar la otra desigualdad.

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

El conjunto E divide en dos partes disjuntas $A \cap E$, $A \cap E^c$. E es Lebesgue medible si divide cada conjunto A de tal manera que la medida externa del conjunto sea la suma exterior de Lebesgue de las partes.

Propiedades Medida de Lebesgue

P1 Si E es un conjunto medible entonces el conjunto E^c es medible

Demostración. Como E es un conjunto medible tenemos que para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1}$$

Para que E^c sea medible debe mostrarse que para cada conjunto $A \subseteq$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap (E^c)^c) = \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap E) \tag{2}$$

pero (2) es identico con (1). Entonces E^c es medible □

P2 E es un conjunto medible si $\mu^*(E) = 0$

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entoncee

$$A \cap E \subset E \;\Rightarrow\; \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$$

y también

$$A \cap E^c \subset A \;\Rightarrow\; \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

en consecuencia

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E)$$

□

P3 Todo conjunto numerable E es medible y tiene medida cero

Demostración. Sea $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ una enumeración del conjunto numerable E. Para cada $a_i,\ i = 1, ..., n$ se tiene

$$a_i \in \ I_i = \left(a_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, a_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right)$$

y también

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

por lo que

$$\mu^*(E) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que $\mu^*(E) = 0$ por tanto según **P2** E es medible □

P4 Si $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles, entonces $E_1 \cup E_2$ es medible

Demostración. Si E_1 es un conjunto medible entonces para algún conjunto A

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \tag{3}$$

Si E_2 es un conjunto medible entonces para el conjunto $A \cap E_1$ se tiene

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap E_1^c) &= \mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2) + \mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2^c)\\ &= \mu^*((A \cap E_2) \cap E_1^c) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)\\ &= \mu^*((A \cap E_2) \cap E_1^c) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*((A \cap E_2) \cap E_1^c) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \tag{4}$$

Usando (3) y (4) tenemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \cap E_2) \cap E_1^c) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \tag{5}$$

Dado que

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup [A \cap E_2 \cap E_1^c]$$

y dado que las medidas exteriores son sub-aditivas, obtenemos para 5

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

consecuentemente $E_1 \cup E_2$ es medible □

P5 Si $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles, entonces $E_1 \cap E_2$ es medible

Demostración. Tenemos que

$$(E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c$$

ya que $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles entonces $E_1^c,\ E_2^c$ son medibles y la unión de medibles es medibles se sgue que

$$(E_1 \cap E_2)^c$$

es medible y en consecuencia $E_1 \cap E_2$ es medible □

P6 Si $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles, entonces $E_1 - E_2$ es medible

Demostración. Tenemos que

$$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$$

es medible por tanto $E_1 - E_2$ es medible □

P7 Si $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles, entonces $E_1 \bigtriangleup E_2$ es medible

Demostración. Tenemos que

$$E_1 \bigtriangleup E_2 = (E_1 - E_2) \bigcup (E_2 - E_1)$$

es medible por tanto $E_1 \bigtriangleup E_2$ es medible □

P8 Si E es un conjunto medible, entonces $E + x_0$ es medible

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&= \mu^*((A \cap E) + x_0) + \mu^*((A \cap E^c) + x_0) \\
&= \mu^*((A + x_0) \cap (E + x_0)) + \mu^*((A + x_0) \cap (E^c + x_0)) \\
&= \mu^*((A + x_0) \cap (E + x_0)) + \mu^*((A + x_0) \cap (E + x_0)^c)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mu^*(A) = \mu^*(A - x_0) = \mu^*(A \cap (E + x_0)) + \mu^*(A \cap (E + x_0)^c)$$

y por tanto $E + x_0$ es medible □