Propiedades Medida de Lebesgue continuacion

Resultados previos

Teorema 1. *Si $A \subset \mathbb{R}$ y O es una cubierta abierta de A, entonces O contiene una subcubierta numerable de elementos que cubren a A*

Demostración. Sea
$$O = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$
una cubierta abierta de $A \subset \mathbb{R}$. Dado que O es una cubierta abierta de A, para cada $x \in A$ hay un λ_x y números $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo $x \in (p_x, q_x) \subset G_{\lambda_x} \in O$.
La familia
$$\mathcal{F} = \{(p_x, q_x) \mid x \in A\}$$
es una cubierta abierta de A. Pensando en la colección $\mathcal{F} = \{(p_x, q_x) \mid x \in A\}$ como un conjunto de pares ordenados de numeros racionales, se ve que *card* $(\mathcal{F}) \leq$ *card* $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \aleph_0$, entonces $\mathcal{F}$ es contable.
Ahora bien para cada intervalo $I \in \mathcal{F}$, elegimos $\lambda_I \in \Lambda$ tal que $I \subset G_{\lambda_I}$. Entonces
$$A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} G_{\lambda_I}$$
Lo que muestra que
$$O' = \{G_{\lambda_I} \mid I \in \mathcal{F}\} \subset O$$
es una subcubierta abierta de para A de O.
Además *card* $(\mathcal{O}') \leq$ *card* $(\mathcal{F}) \leq \aleph_0$, asi que O' es una subcubierta abierta numerable para A de O. □

Lema 1. *Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, entonces*
$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$
donde cada I_n es un intervalo abierto y acotado

Demostración. Si U es abierto, para cada $p \in V$ existe $\epsilon_p > 0$ tal que
$$(p - \epsilon_p, p + \epsilon_p) \subset U$$
Consideramos ahora $s_p, t_p \in \mathbb{Q}$ tal que
$$p - \epsilon_p < s_p < p < t_p < p + \epsilon_p$$
De esta forma
$$V = \bigcup_{p \in V} (s_p, t_p)$$
y sólo resta notar que la colecciòn de intervalos con extremos racionales es numerable □

Proposición 1. *Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, existe una familia numerable y disjunta de intervalos abiertos, digamos $\{I_n\}$, tal que:*

$$U = \bigcup_n I_n$$

Demostración. Definimos la relación en U: si $x, y \in U$, se dice que $x \sim y$, si existe un intervalo abierto J tal que

$$\{x, y\} \subset J \subset U$$

Vamos a ver que $\sim$ es una relación de equivalencia

1. **Reflexión**. Tenemos que si $x \in U$ al ser U abiertos, existe $\delta > 0$ talque

$$(x - \delta, x + \delta) \subset U$$

y podemos considerar

$$J = \left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$$

de esta manera $\{x, x\} \subset J \subset U$ y por tanto $x \sim x$

2. **Simétrica**. En este caso se tien que si $x, y \in U$ son tal que $x \sim y$ entonces existe un intervalo abierto J tal que

$$\{x, y\} \subset J \subset U$$

el mismo intervalo J nos serviría para que $y \sim x$

3. **Transitiva**. Tenemos que

$$x \sim y \;\Rightarrow\; \exists\, J' \;\ni\; \{x, y\} \subset J' \subset U$$

$$y \sim z \;\Rightarrow\; \exists\, J'' \;\ni\; \{y, z\} \subset J'' \subset U$$

dado que $y \in J' \cap J''$ se tiene que J' y J" no son disjuntos y como la unión de conjuntos abiertos es abierto entonces podemos considerar $J = J' \cup J''$ el cual cumple que $J \subset U$ por lo tanto $x \sim z$ ya que existe un intervalo abierto J tal que

$$\{x, z\} \subset J \subset U$$

Por tanto $\sim$ particiona a U en clases de equivalencia. Para cada $x \in U$ denotamos $\overline{x}$ a la clase de equivalencia que contiene a x. Demostraremos que $\overline{x}$ es un intervalo abierto para toda $x \in U$. En efecto, sea $x \in U$ y consideremos la clase $\overline{x}$ tomamos $a, b \in \overline{x}$, con $a < b$. Los casos posibles son los siguientes:

$$b \leq x, \quad a < x < b, \quad x \leq a.$$

Trabajaremos el caso $b \leq x$, los otros casos son análogos.
Si $a < b \leq x$ por la definición de $\sim$, se tiene

$$(a, x) \subset U, \quad (b, x) \subset U$$

por tanto:

$$(a, b) \subset (a, x) \subset U$$

Luego $\overline{x}$ es un intervalo. Para ver que $\overline{x}$ es abierto, sea $y \in \overline{x}$, resulta que hay un intervalo abierto J_y tal que $\{x, y\} \subset J_y \subset U$, y es inmediato que, en este caso, $J_y \subset \overline{x}$. Por tanto, $\overline{x}$ es un abierto.
Ahora bien, se sabe que todo intervalo abierto no vacío contiene números racionales, y como $\mathbb{Q}$ es numerable, se sigue que $\{\overline{x} \mid \overline{x} \in U\}$ también es numerable.
Como además, si $x, y \in U$, entonces

$$\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset \ \ \textit{ó} \ \ \overline{x} = \overline{y}$$

se tiene que es la unión de una familia numerable y disjunta de intervalos abiertos □

P9 Todo intervalo es medible

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Mostraremos que el intervalo (a, ∞) es medible.
Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $\mu^*(A) = \infty$, entonces claramente

$$\mu^*(A) > \mu^*(A \cap (a, \infty)) + \mu^*(A \cap (a, \infty)^c)$$

Supongamos que $\mu^*(A) < \infty$

a) $\forall\ \epsilon > 0$ consideramos la familia $\{I_n\}$ de intervalos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad y \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) < \mu^*(A) + \epsilon$$

b) Consideramos $I'_n = I_n \cap (a, \infty)$, $I''_n = I_n \cap (a, \infty)^c = I_n \cap (-\infty, a]$

c) Entonces $I'_n \cup I''_n = I_n \cap (-\infty, \infty) = I_n$

d) Además

$$I'_n \cap I''_n = \emptyset \ \textit{por lo que} \ \lambda(I_n) = \lambda(I'_n) + \lambda(I''_n)$$

e) Por otro lado

$$A \cap (a, \infty) \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right) \cap (a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I_n \cap (a, \infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I'_n$$

f) De manera que

$$\mu^*(A \cap (a, \infty)) \leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I'_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I'_n)$$

g) Se procede de manera análoga para $A \cap (a, \infty)^c$ para obtener

$$\mu^*(A \cap (a, \infty)^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I''_n)$$

h) Se tiene entonces

$$\mu^*(A \cap (a, \infty)) + \mu^*(A \cap (a, \infty)^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I'_n) + \lambda(I''_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) < \mu^*(A) + \epsilon$$

i) Como ϵ es arbitrario se tiene entonces

$$\mu^*(A \cap (a, \infty)) + \mu^*(A \cap (a, \infty)^c) \leq \mu^*(A)$$

□

De manera análoga se prueba que el intervalo $(-\infty, b)$ es medible. La medibilidad del intervalo (a, b) se sigue de la igualdad $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$

P10 Sea $\{E_i\}_{i=1}^n$ una sucesión finita y disjunta de conjuntos medibles. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap E_i)\right) = \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$$

En particular cuando $A = \mathbb{R}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

Demostración. a) La igualdad es clara para $n = 1$

b) Suponemos que la igualdad es válida para n-1 conjuntos medibles disjuntos

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A \cap E_i)\right) = \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_i)$$

c) Para un conjunto medible E_n tenemos

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \cap E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \cap E_n^c\right) \\
&= \mu^*\left(A \cap E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)\right) \\
&= \mu^*\left(A \cap E_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*\left(A \cap E_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*\left(A \cap E_i\right)
\end{aligned}$$

La propiedad se sigue por el principio de inducción

□