Propiedades Medida de Lebesgue continuacion

P11 Sea $\{E_i\}$ una sucesión infinita de conjuntos medibles. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

son conjuntos medibles.

Demostración. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $H_1 = E_1$ y $H_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ para cada $n \geq 2$. Entonces $\{H_n\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos medibles y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Notemos que

$$E^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)^c \quad para \ \ cada \ n$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y usando el resultado anterior se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)^c\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap H_i) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

Para cada n. Se sigue que

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap H_i) + \mu^*(A \cap E^c)$$

ya que $A \cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i)$ y subaditividad contable

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap H_i) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

Por lo tanto E es medible.

Ya que $\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c$, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ es medible. $\square$

P12 Si $\{E_i\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos medibles. Entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Demostración. Según los resultados

a) Sea $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ una sucesión finita y disjunta de conjuntos medibles. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)\right) = \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

En particular si $A = \mathbb{R}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i)$$

b) Si $E_1,\ E_2$ son conjuntos medibles entonces $E_1 \cup E_2$ es medible

c) Sea $\{E_i\}$ una sucesión infinita de conjuntos medibles. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

son conjuntos medibles.

Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \tag{1}$$

nuevamente ya que las medidas externas son sub-aditivas, tenemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

y dado que todos los conjuntos involucrados son medibles, tenemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{2}$$

por (1) y (2) obtenemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

$\square$

P13 Sea $\{E_i\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos medibles

a) Si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para toda n y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$$

b) Suponiendo que $\mu^*(E_1) < \infty$. Si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo n y $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$$

Demostración. a) Suponiendo que $\mu^*(E_n) < \infty$ para todo n. Sea $H_1 = E_1$ y $H_k = E_k - E_{k-1}$ para $k \geq 2$. Entonces $\{H_k\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tal que

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$$

Notamos que

$$E_k = H_k \cup E_{k-1} \ \Rightarrow \ \mu^*(H_k) = \mu^*(E_k) - \mu^*(E_{k-1})$$

para $k \geq 2$ y según el resultado
Si $\{E_i\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos medibles. Entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

tenemos

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(H_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \mu^*(E_k) - \mu^*(E_{k-1}) + \mu^*(E_1)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$$

b) Suponiendo que $\mu^*(E_1) < \infty$. Sea $H_k = E_k - E_{k+1}$ para cada k entero positivo. Entonces $\{H_k\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tal que

$$E_1 - E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$$

como en la prueba de (a)

$$\mu^*(E_1 - E) = \mu^*(E_1) - \mu^*(E) \quad y \quad \mu^*(H_k) = \mu^*(E_k) - \mu^*(E_{k+1})$$

para $k \geq 2$ y según el resultado
Si $\{E_i\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos medibles. Entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E_1) - \mu^*(E) &= \mu^*(E_1 - E) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(H_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\mu^*(E_k) - \mu^*(E_{k+1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu^*(E_1) - \mu^*(E_n)) \\
&= \mu^*(E_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu^*(E_n)))
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mu^*(E_1) - \mu^*(E) = \mu^*(E_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu^*(E_n)))$$

y en consecuencia

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$$

$\square$