Caracterizaciòn de conjuntos medibles

Notamos que la uniòn de una colecciòn numerable de conjuntos cerrados no necesariamente es cerrada y la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos no necesariamente es abierto.

Definición 1. *Un conjunto que es unión numerable (finita ó infinita) de conjuntos cerrados es llamado un conjunto F_σ*

Ejemplo Cada uno de los siguientes es un conjunto F_σ

a) Un conjunto cerrado

b) Un conjunto numerable

c) La unión numerable de F_σ

d)

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

e) Un conjunto abierto G pues

$$G = \bigcup_{n} I_n$$

donde I_n es un intervalo abierto

Definición 2. *Un conjunto que es intersección numerable (finita ó infinita) de conjuntos abiertos es llamado un conjunto G_δ*

Ejemplo Cada uno de los siguientes es un conjunto F_σ

a) Un conjunto abierto en particular un intervalo abierto

b) un intervalo cerrado ya que

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

c) Un conjunto cerrado

d) La intersección numerable de conjuntos G_δ

Teorema 1. *Sea E un conjunto. Son equivalentes*

a) E es medible

b) Para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto $\mathcal{O} \supset E$ tal que

$$\mu^*(O - E) < \epsilon$$

c) Hay un $G \in G_\delta$ con $G \supset E$ tal que

$$\mu^*(G - E) = 0$$

d) Para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado $F \subset E$ tal que

$$\mu^*(O - F) = 0$$

e) Hay un $F \in F_\sigma$ con $F \subset E$ tal que

$$\mu^*(E - F) = 0$$

Demostración. 1. (a $\Rightarrow$ b)

a) Supongamos que $\mu^*(E) < \infty$. Elegimos una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos abiertos tal que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \mu^*(E) + \epsilon$$

Hacemos $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Dado que $O = E \cup (O - E)$ son disjuntos

$$\mu^*(O) = \mu^*(E) + \mu^*(O - E)$$

por lo tanto

$$\mu^*(O - E) = \mu^*(O) - \mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - \mu^*(E) < \epsilon$$

b) Supongamos que $\mu^*(E) = \infty$. Si el conjunto $\mathbb{R}$ lo expresamos como unión numerable disjunta de conjuntos abiertos I_n

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Definimos $E_n = E \cap I_n$. Claramente $\mu^*(E_n) < \infty$. Según la primera parte, existe un abierto O_n con

$$I_n \supset O_n \supset E_n$$

tal que

$$\mu^*(O_n - E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

Definimos

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

O es un abierto que satisface

$$E \subset O, \quad y \quad O - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n - E_n)$$

esto nos da

$$\mu^*(O - E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(O_n - E_n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

2. $(b \Rightarrow$ c)
   Dado $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ hay un abierto $G_n \supset E$ con $\mu^*(G_n - E) < \dfrac{1}{n}$. Definimos
   $$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$
   entonces G es un G_δ tal que
   $$G \supset E \quad y \quad \mu^*(G - E) \le \mu^*(G_n - E) < \frac{1}{n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$
   tomando $n \to \infty$
   $$\mu^*(G - E) = 0$$

3. $(c \Rightarrow$ a)
   Escribimos $E = G - (G - E)$ ya que $\mu^*(G - E) = 0$ entonces $G - E$ es medible.
   Como G_δ es la intersección de conjuntos abiertos entonces G es medible.
   La diferencia $G - (G - E)$ es medible y por tanto E es medible.

4. $(a \Rightarrow$ d)
   El conjunto E^c es medible y por (b) hay un abierto $O \supset E^c$ tal que
   $$\mu^*(O - E^c) < \epsilon$$
   pero $O - E^c = E - O^c$. Definimos $F = O^c$ y entonces F es cerrado que satisface
   $$F \subset E, \quad \mu^*(E - F) = \mu^*(E - O^c) = \mu^*(O - E^c) < \epsilon$$

5. $(d \Rightarrow$ e)
   Dada $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, hay un cerrado $F_n \subset E$ tal que
   $$\mu^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$$
   Definimos
   $$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$
   entonces $F \in F_\sigma$ tal que
   $$F \subset E, \quad y \quad \mu^*(E - F) \le \mu^*(E - F_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   haciendo $n \to \infty$
   $$\mu^*(E - F) = 0$$

6. $(e \Rightarrow$ a)
   Escribimos $F \cup (E - F) = E$. Como F_σ es unión numerable de conjuntos cerrados entonces F es medible. Además el conjunto $E - F$ tiene medida cero por tanto es medible y la unión de medibles es medible por tanto E es medible

$\square$