Funciones medibles

Sea $E \subset \mathbb{R}$ y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Definimos

a) $E(f \geq \alpha) = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$

b) $E(f \leq \alpha) = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$

c) $E(f < \alpha) = \{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$

d) $E(f = \alpha) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$

e) $E(f > \alpha) = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$

Definición 1. *Dada una función $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. definida en un conjunto E que es medible, se dice que f es Lebesgue medible si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$$

es medible

Ejemplo Si f es una función constante en un conjunto medible E, entonces f es medible en E.
En efecto si $f(x) = c$ para todo $x \in E$, entonces para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$E(f > \alpha) = \begin{cases} E & si \quad \alpha < c \\ \emptyset & si \quad \alpha \geq c \end{cases}$$

ya que ambos E, $\emptyset$ son medibles, entonces f es medible.

Teorema 1. *Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función definida en un conjunto medible E. Son equivalentes*

a) $E(f > \alpha)$ *es medible pata todo* $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $E(f \geq \alpha)$ *es medible pata todo* $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $E(f < \alpha)$ *es medible pata todo* $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $E(f \leq \alpha)$ *es medible pata todo* $\alpha \in \mathbb{R}$

Demostración. 1. $(a \Rightarrow b)$.
Se sigue de la relación

$$E(f \geq \alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > \alpha - \frac{1}{n}\right)$$

En efecto,

$$\mu^*(E(f \geq \alpha)) = \lim_{n\to\infty} \mu^*\left(E\left(f > \alpha - \frac{1}{n}\right)\right)$$

2. $(b \Rightarrow c)$.
Se sigue de la relación

$$E(f < \alpha) = E - E(f \geq \alpha)$$

3. $(c \Rightarrow d)$.
   Se sigue de la relación
   $$E(f \leq \alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < \alpha + \frac{1}{n}\right)$$
   En efecto,
   $$\mu^*(E(f \leq \alpha)) = \lim_{n\to\infty} \mu^*\left(E\left(f < \alpha + \frac{1}{n}\right)\right)$$

4. $(d \Rightarrow a)$.
   Se sigue de la relación
   $$E(f > \alpha) = E - E(f \leq \alpha)$$

□

Teorema 2. *Si f es esta definida en un conjunto medible E, entonces f es medible si f satisface una de las cuatro condiciones anteriores.*
Se dice que una propiedad se mantiene en casi todas partes, si se mantiene en todas partes excepto en un conjunto de medida cero.

Teorema 3. *Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y sea $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Si $f = g$ en casi todas partes en E, entonces g es medible.*

Demostración. Para $r \in \mathbb{R}$, sea
$$A = \{x \in E \mid f(x) > r\} \quad y \quad B = \{x \in E \mid g(x) > r\}$$
El conjunto A es medible por hipótesis y los conjuntos $A - B$ y $B - A$ tienen medida cero. Por lo tanto, el conjunto
$$B = (B - A) \cup (B \cap A) = (B - A) \cap (A - (A - B))$$
es medible y por tanto la función g es medible. □

Teorema 4. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces el conjunto*
$$E(f > g) = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}$$
es medible

Demostración. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de números racionales. Entonces $\mathbb{Q}$ es numerable. Notamos que
$$\begin{aligned} E(f > g) = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\} &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in E \mid f(x) > r > g(x)\} \\ &= \left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in E \mid f(x) > r\}\right) \bigcap \left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in E \mid r > g(x)\}\right) \end{aligned}$$
cada uno de los conjuntos
$$\{x \in E \mid f(x) > r\} \quad y \quad \{x \in E \mid r > g(x)\}$$
son medibles. Ya que la unión de conjuntos medibles es un conjunto medible y la intersección de conjuntos medibles es medible, se sigue que $E(f > g)$ es medible. □