Propiedades de las funciones medibles

Sea $E \subset \mathbb{R}$ y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Definimos

a) $E(f \geq \alpha) = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$

b) $E(f \leq \alpha) = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$

c) $E(f < \alpha) = \{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$

d) $E(f = \alpha) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$

e) $E(f > \alpha) = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$

Definición 1. *Dada una función $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. definida en un conjunto E que es medible, se dice que f es Lebesgue medible si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$$

es medible

Ejemplo Una función continua definida en un conjunto medible E, es medible.

Demostración. La función $f : E \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si para todo conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ se cumple que $f^{-1}(G)$ es un conjunto abierto. Entonces el conjunto

$$E(f > \alpha) = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

es un conjunto abierto y por tanto medible. Por tanto f es medible □

Teorema 1. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles, suponiendo que $f + g$ esta definida para todo $x \in E$. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

a) $f + c$

b) cf

c) $f + g$

d) fg

e) $\max\{f, g\}$

f) $\min\{f, g\}$

g) $|f|$

son medibles

Demostración. a) Sea α un número real fijo. Entonces

$$E(f + c > \alpha) = E(f > \alpha - c)$$

al ser $E(f > \alpha - c)$ se sigue que $f + c$ es medible

b) La medibilidad de cf se sigue de las igualdades

$$E(cf > \alpha) = \begin{cases} E\left(f > \frac{\alpha}{c}\right) & si \quad c > 0 \\ E\left(f < \frac{\alpha}{c}\right) & si \quad c < 0 \end{cases}$$

Si $c = 0$, entonces

$$E(cf > \alpha) = \begin{cases} E & si \quad \alpha < 0 \\ \emptyset & si \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

c) $E(f+g > \alpha) = E(f > \alpha - g)$. Ya que g es medible, la función $\alpha - g$ es medible. Entonces $E(f > \alpha - g)$ es medible y por lo tanto $f + g$ es medible

d) Para mostrar la medibilidad de fg primero mostramos la medibilidad de f^2 siempre que f sea medible. En efecto

$$E(f^2 > \alpha) = E(f > \sqrt{\alpha}) \cup E(f < -\sqrt{\alpha}) \quad si \quad \alpha \geq 0$$

y $E(f^2 > \alpha) = E$ si $\alpha < 0$. Por lo tanto f^2 es medible.
Ahora para ver la medibilidad de fg, usamos la medibilidad de las funciones $f + g$, $f - g$, $(f + g)^2$ y $(f - g)^2$ y por tanto

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

es medible

e) La relación

$$E(\max\{f, g\} > \alpha) = E(f > \alpha) \bigcup E(g > \alpha)$$

muestran que $\max\{f, g\}$ es medibles

f) La relación

$$E(\min\{f, g\} > \alpha) = E(f > \alpha) \bigcap E(g > \alpha)$$

muestran que $\min\{f, g\}$ es medibles

g) Las funciones $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = \min\{-f, 0\}$ son medibles y por tanto

$$|f| = f^+ + f-$$

es medible

□

Ejemplo La medibilidad de $|f|$ no implica la medibilidad de f. Consideremos Un subconjunto P no medible del intervalo $[0, 1]$. Definimos la función

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & si & x \in P \\ -1 & si & x \notin P \end{Bmatrix}$$

El conjunto $E(f > 0) = P$ es no medible y por tanto f no es medible. Por otro lado , para $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos

$$E(|f| > \alpha) = \begin{cases} E & si \quad \alpha < 1 \\ \emptyset & si \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ya que ambos E, $\emptyset$ son medibles, se sigue que $|f|$ es medible

Ejemplo Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entonces $f(x) = 0$ en casi todas partes, por tanto es $f(x) = g(x)$ para $g(x) = 0$ en casi todas partes, y como, la función g es medible entonces f es medible

Ejemplo Sea E un conjunto medible de $\mathbb{R}$ y sea $A \subset E$ .La función característica χ_A de A es la función definida por

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

se tiene ambos χ_A es medible sólo si A es medible.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$E(\chi_A > \alpha) = \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha \geq 1 \\ A & si \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ E & si \quad \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Ya que E y $\emptyset$ son medibles, entonces χ_A es medible si A es medible. □

Ejemplo Sea E un conjunto medible de $\mathbb{R}$. La funcion $f : E \to \mathbb{R}$ se dice que es una función simple, si existe, una clase disjunta finita $\{E_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos medibles con

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad con \quad E_i \cap E_j = \emptyset \;\; si \; i \neq j$$

y un conjunto finito $\{\alpha_i\}$ de números reales tal que $f(x) = \alpha_i$ si $x \in E_i$ con $i = 1, ..., n$ la cual esta definida

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

donde χ_{E_i} es la función característica del conjunto medible E_i. Es claro que los conjuntos $E_i = E(f(x) = \alpha_i)$ forman una partición del conjunto E, y por la propiedad de linealidad de las funciones medibles, las funciones simples son medibles

Sucesiones de funciones medibles

Sea $\{f_i\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto medible E en $\mathbb{R}$. Entonces las funciones

$$f^* = \text{máx}\{f_1, f_2, ..., f_n\} \quad y \quad f_* = \text{mín}\{f_1, f_2, ..., f_n\}$$

estan definidas en E, donde los valores para algún $x \in E$ estan dados respectivamente por

$$f^*(x) = \text{máx}\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\} \quad y \quad f_*(x) = \text{mín}\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$$

Se tienen tmabién

$$\inf_n f_n = \inf\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\} \quad y \quad \sup_n f_n = \sup\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$$

Teorema 2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$. Entonces*

a) $f^* = \max\{f_1, f_2, ..., f_n\}$

b) $f_*(x) = \min\{f_1, f_2, ..., f_n\}$

c) $\sup_n f_n = \sup\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$

d) $\inf_n f_n = \inf\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$

son medibles

Demostración. Tenemos que

a) Si $f^* = \max\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E(f^* > \alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i > \alpha)$$

ya que cada f_i es medible en E, tenemos que $E(f_i > \alpha)$ es medible para cada i y por tanto $E(f^* > \alpha)$ es medible. Por lo tanto f^* es medible en E.

b) En este caso se tiene

$$f_*(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\} = -\max\{-f_1, -f_2, ..., -f_n\}$$

y por tanto $f_*(x)$ es medible

c) En este caso tomamos $g = \sup\limits_n f_n = \sup\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$, entonces $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$E(g > \alpha) = \bigcup_{i=1}^{\infty} E(f_i > \alpha)$$

es medible y por tanto $\sup_n f_n$ es medible en E.

d) Dado que

$$\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$$

se sigue que $\inf_n f_n$ es medible en E.

□