La integral de Lebesgue

Ejemplo Sea E un conjunto medible de $\mathbb{R}$. La funcion $\varphi : E \to \mathbb{R}$ se dice que es una función simple, si existe, una clase disjunta finita $\{E_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos medibles con

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad con \quad E_i \cap E_j = \emptyset \;\; si \;\; i \neq j$$

y un conjunto finito $\{\alpha_i\}$ de números reales tal que $\varphi(x) = \alpha_i$ si $x \in E_i$ con $i = 1, ..., n$ la cual esta definida

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

donde χ_{E_i} es la función característica del conjunto medible E_i. Es claro que los conjuntos $E_i = E(\varphi(x) = \alpha_i)$ forman una partición del conjunto E, y por la propiedad de linealidad de las funciones medibles, las funciones simples son medibles

Definición 1. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa dada por*

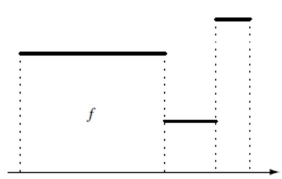
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

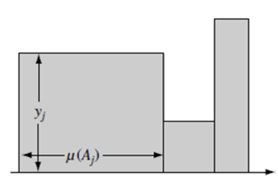
donde $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = \alpha_i\}$. Definimos la integral de Lebesgue de φ en $\mathbb{R}$ como

$$\int \varphi = \int \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i)$$

Si E es un conjunto medible, definimos la integral de Lebesgue de φ en E como

$$\int_E \varphi = \int_E \varphi(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i \cap E)$$





Lema 1. *Sean*

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}(x) \quad y \quad \sum_{k=1}^{n} z_k \chi_{B_k}(x)$$

dos representaciones de la misma función φ. Entonces

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \mu^*(A_j) = \sum_{k=1}^{n} z_k \mu^*(B_k)$$

Demostración. Ya que

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = E = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

tenemos

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{n} (A_j \cup B_k) \quad y \quad B_k = \bigcup_{j=1}^{m} (B_k \cup A_j)$$

usando la aditividad de μ^* vemos que

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_j \cup B_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} y_j \mu^*(A_j \cup B_k) \tag{1}$$

ya que todas las y_j son positivas, las sumas anteriores siempre existen en $[0, \infty]$. Similarmente

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \mu^*(B_k) = \sum_{k=0}^{n} z_k \sum_{j=1}^{m} \mu^*(A_j \cup B_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_k \mu^*(A_j \cup B_k) \tag{2}$$

Pero $y_j = z_k$ siempre que para $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, mientras que para $A_j \cap B_k = \emptyset$ tenemos

$$\mu^*(A_j \cup B_k) = \mu^*(\emptyset) = 0$$

Por tanto

$$y_j \mu^*((A_j \cup B_k) = z_k \mu^*(A_j \cup B_k) \ \ \forall \ (j, k)$$

y por lo tanto (1) y (2) tienen el mismo valor □

Teorema 1. *Sean φ, ψ dos funciones simples no negativas y sea $\alpha \geq 0$. Entonces*

a) $\int \alpha\varphi = \alpha \int \varphi$

b) $\int \varphi \geq 0$

Demostración. Sean

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad y \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

a) Ya que

$$\alpha\varphi(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

tenemos que

$$\int \alpha\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i \mu^*(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i) = \alpha \int \varphi$$

b) Ya que φ es no negativa, tenemos que $\alpha_i \geq 0$ para cada i, por tanto

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i) \geq 0$$

□