Propiedades de la integral de Lebesgue

Teorema 1. *Sean varphi ψ dos funciones simples no negativas y sea $\alpha \geq 0$. Entonces*

a) $\displaystyle\int \alpha\varphi = \alpha \int \varphi$

b) $\displaystyle\int \varphi \geq 0$

c) $\displaystyle\int \varphi + \psi = \int \varphi + \int \psi$

d) $\displaystyle\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty}} \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \varphi$

e) Sean φ, ψ dos funciones simplea no negativas. Si $\varphi \leq \psi$ entonces

$$\int \varphi \leq \int \psi$$

Demostración. Sean

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad y \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

a) Ya que

$$\alpha\varphi(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

tenemos que

$$\int \alpha\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i \mu^*(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i) = \alpha \int \varphi$$

b) Ya que φ es no negativa, tenemos que $\alpha_i \geq 0$ para cada i, por tanto

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^*(A_i) \geq 0$$

c) Tenemos el conjunto $E_{ij} = A_i \cap B_j$ y $S = \{(i,j)\}$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Entonces

$$\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in S} a_i \chi_{E_{ij}}(x) \quad y \quad \psi(x) = \sum_{(i,j)\in S} b_j \chi_{E_{ij}}(x)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) &= \sum_{(i,j)\in S} (a_i + b_j)\mu^*(E_{ij}) \\
&= \sum_{(i,j)\in S} a_i \mu^*(E_{ij}) + = \sum_{(i,j)\in S} b_j \mu^*(E_{ij}) \\
&= \int \varphi + \int \psi
\end{aligned}$$

d) Tenemos que

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty}} \varphi = \sum_{i}^{n} a_i \mu^* \left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{i}^{n} a_i \sum_{j}^{\infty} \mu^*(A_i \cap E_j) = \sum_{j}^{\infty} \sum_{i}^{n} a_i \mu^*(A_i \cap E_j) = \sum_{j}^{\infty} \int_{E_j} \varphi$$

e) Tenemos que $\psi = \varphi + \psi - \varphi$ donde $\psi - \varphi$ es no negativa entonces

$$\int \psi = \int \psi + \int \psi - \varphi \geq \int \varphi$$

$\square$

La integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas

Definición 1. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una funcion medible no negativa. Definimos la integral de Lebesgue de f en E como*

$$\int_E f = \int_E f(x)\ dx = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \text{ es simple} \right\}$$

Si la integral $\int_E f$ es finita, decimos que f es Lebesgue integralble en E.
Si A es un subconjunto medible de E, definimos

$$\int_A f = \int_A f(x)\ dx = \int_A \chi_A(x) f(x)\ dx$$

Teorema 2. *Sea E un conjunto medible, y sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas, entonces*

a) Si $f \leq g$, entonces $\int_E f \leq \int_E g$

b) si $f \geq 0$, entonces $\int_E f \geq 0$

c) Si $\alpha \geq 0$, entonces $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$

Demostración. a) Tenemos que

$$\int_E f = \int_E f(x)\ dx = \sup\left\{\int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \textit{ es simple}\right\}$$

por lo que si $f \leq g$ debemos obtener

$$\left\{\int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \textit{ es simple}\right\} \subseteq \left\{\int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq g,\ \varphi \textit{ es simple}\right\}$$

por lo tanto

$$\int_E f \leq \int_E g$$

b) Se sigue del inciso anterior

c) Si $\alpha = 0$, entonces por nuestra convención $0 \cdot \infty = 0$, tenemos

$$\int_E \alpha f = \int_E 0\ dx = 0 = \alpha \int_E f$$

Si $\alpha > 0$, vemos que si φ es una función simple que satisface $0 \leq \varphi \leq f$, entonces $\alpha\varphi$ es una función simple y $0 \leq \alpha\varphi \leq \alpha f$.Si ψ es una función simple que satisface $0 \leq \psi \leq \alpha f$, entonces $\dfrac{1}{\alpha}(\psi)$ es una función simple y $0 \leq \dfrac{1}{\alpha}\psi \leq f$. Así

$$\begin{aligned}
\int_E \alpha f &= \sup\left\{\int_E \psi \mid 0 \leq \psi \leq \alpha f,\ \psi \textit{ es simple}\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\psi\right) \mid 0 \leq \frac{1}{\alpha}\psi \leq f,\ \frac{1}{\alpha}\psi \textit{ es simple}\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E \alpha\varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \textit{ es simple}\right\} \\
&= \alpha \sup\left\{\int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \textit{ es simple}\right\} \\
&= \alpha \int_E f
\end{aligned}$$

□