La integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas (continuación)

Definición 1. *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa y $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ su representación canónica. Entonces, su integral es:*

$$\int_E \varphi = \int_E \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu^*(E_k)$$

Sea f una función no negativa y medible, supongamos que $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es una función simple. Si $0 \leq \varphi \leq f$, por la propiedad de monotonía, buscamos que se satisfaga $\int_E \varphi \leq \int_E f$. Por consiguiente, la definición de $\int_E f$ deberá satisfacer

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f \right\} \leq \int_E f$$

esto sugiere la siguiente definición

Definición 2. *Si f es una función medible no negativa definida en un conjunto E de $\mathbb{R}$, definimos su integral como*

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ es simple} \right\}$$

Observemos que

$$0 \leq \int_E f \leq \infty, \quad f \text{ medible}, \ f \geq 0$$

Notación: Para f medible no negativa, en ocasiones usaremos la notación

$$I_f = \left\{ \int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ es simple} \right\}$$

Lema 1. *Sea f una función medible no negativa definida en un conjunto E de $\mathbb{R}$. Si f es simple, entonces la definición 1 coincide con la definición 2*

Demostración. Debemos establecer que $\int_E f = \sup I_f$. Para esto, como $\int_E f \in I_f$, basta mostrar que si φ es simple y $0 \leq \varphi \leq f$, entonces se cumple $\int_E \varphi \leq \int_E f$.
Sea pues φ una función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Expresemos φ, f mediante sus correspondientes representaciones canónicas

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, \quad f = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \chi_{B_j}$$

Tenemos que

$$\varphi = \sum_{j,k} c_k \chi_{E_k \cap B_j}, \quad f = \sum_{j,k} d_j \chi_{E_k \cap B_j}$$

Si $E_k \cap B_j \neq \emptyset$, al elegir $x \in E_k \cap B_j$ resulta

$$c_k = \varphi(x) \leq f(x) = d_j$$

por lo que

$$\int_E \varphi = \sum_{j,k} c_k \mu^* E_k \cap B_j \leq \sum_{j,k} d_j \mu^* E_k \cap B_j = \int_E f$$

□

Proposición 1. *Sea φ una función simple, no negativa. Defnimos*

$$\mu_\varphi(E) = \int_E \varphi \, d\mu$$

entonces μ_φ es una medida

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ la representación canónica de φ. Tenemos que

$$\mu_\varphi(E) \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_{E_j}(E)$$

o sea μ_φ es una combinación lineal no negativa de medidas y es por tanto una medida. □

Proposición 2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$. Si $\{f_n\}$ converge a f en E, entonces f es medible en E.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tenemos que

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \sup f_n = \lim_{n\to\infty} \inf f_n$$

estos últimos son medibles. Por lo tanto f es medible. □

Lema 2. *Desigualdad de Chevishev.*
Sea f medible, $f \geq 0$. Si $c > 0$, entonces

$$\mu^*(\ \{x \in E \mid c \leq f(x)\} \ ) \leq \frac{1}{c} \int_E f$$

Demostración. Hagamos $A = \{x \in E \mid c \leq f(x)\}$. Como $0 \leq f$, resulta $0 \leq c\chi_A \leq f$. Siendo $c\chi_A$ una función simple, esto implica

$$c\mu^*(A) = \int_E c\chi_A \leq \int_E$$

□

Teorema 1. *Teorema de convergencia monótona.*
Sea E un conjunto medible de $\mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión no decreciente de funciones no negativas medibles definidas en E. Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in E$, entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Demostración. Ya que cada f_n es no negativa y medible en E, la función de límite f es también no negativa y medible en E. ya que $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ resulta que $\left\{\int_E f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona no decreciente y

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f$$

Para probar la desigualdad inversa, fijamos $0 < \alpha < 1$ y sea φ una función simple con $0 \leq \varphi \leq f$. Definimos

$$E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

Ya que $f_n(x)$ crece hacia $f(x)$ puntualmente, resulta que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo n y

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

así

$$\int_E f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \varphi$$

como $\phi(E) = \int_E \varphi$ define una medida, tenemos

$$\alpha \int_E \varphi = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

ahora tomando $\alpha \to 1$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \geq \int_E \varphi$$

Esto es cierto para todas las funciones simples no negativas φ que satisfacen $\varphi \leq f$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \geq \sup\left\{\int_E \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \text{ es simple}\right\} = \int_E f$$

con lo anterior tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

□