Propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas (continuación)

Lema 1. *Lema de Fatou. Suponga que E es un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas para todo n. Entonces*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n \leq \lim_{n\to\infty} \int_E \inf\ f_n$$

Demostración. Definimos $h_n = \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$ tal que h_n es no negativa y medible y $\{h_n\}$ es no decreciente con

$$\lim_{n\to\infty} \inf f_n = \lim_{n\to\infty} h_n$$

Por el teorema de convergencia monótona

$$\int_E \lim_{n\to\infty} \inf f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n$$

Dado que $h_n \leq f_n$ para todo n y para todo $x \in E$, se sigue

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h_n = \lim_{n\to\infty} \inf \int_E h_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n$$

y obtenemos

$$\int_E \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n$$

□

Teorema 1. *Si f y g son no negativas y medibles definidas en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ entonces*

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Demostración. Sean $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ sucesiones de funciones simples tales que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_i(x) = g(x)$$

$\forall\ x \in E$ tenemos

$$\int_E \varphi_i + \psi_i = \int_E \varphi_i + \int_E \psi_i$$

dado que $0 \leq \varphi_i + \psi_i$ y $\{\varphi_i + \psi_i\}$ converge a $f + g$, usando el teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

□

Teorema 2. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones no negativas medibles, definidas en E. Entonces*

$$\int_E \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$$

Demostración. Aplicando resultados anteriores inductivamente

$$\int_E \left[\sum_{n=1}^{N} f_n\right] = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n$$

cada f_n es no negativa y medible, si hacemos $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona

$$\int_E \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right] = \lim_{n\to\infty} \int_E \left[\sum_{n=1}^{N} f_n\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$$

□

Teorema 3. *Sea f una función no negativa y medible en $\mathbb{R}$. Denotamos $\mathcal{M}$ la familia de conjuntos medibles en $\mathbb{R}$. Entonces el mapeo $\Phi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ definido por*

$$\Phi(E) = \int_E f$$

con $E \subset \mathcal{M}$ es numerablemente aditivo

Demostración. Tenemos que existe una sucesión de funciones simples no negativas $\{\varphi_i\}$ tal que $\varphi \to f$. Por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n = \int_E f$$

Supongamos ahora que $\{E_i\}$ es una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Tenemos que

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi_n\right]$$

Dado que $\left\{\int_{E_i} \varphi_n\right\}$ es una sucesión doblemente indexada no negativa de términos, tal que

$$\int_{E_i} \varphi_n \leq \int_{E_i} \varphi_{n+1}$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} \varphi_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\int_{E_i} \varphi_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f$$

consecuentemente

$$\int_E f = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f$$

□

Teorema 4. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea f una función medible, no negativa definida en E. Entonces*

$$\int_E f = 0 \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad f = 0, \quad c.t.p.en\ E$$

Demostración. Supongamos que $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ es una función simple. Si $\varphi(x) = 0$ c.t.p en E y $a_i > 0$ entonces $\mu^*(A_i \cap E) = 0$ y por tanto

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i \cap E) = 0$$

Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de funciones simples que tienden a f para todo $x \in E$ Si $f = 0$ c.t.p. en E, entonces

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_{i+1}(x) \leq f(x)$$

se tien que $\varphi_i = 0$ c.t.p. en E para toda i. Por lo tanto

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_i = 0$$

Ahora supongamos que $\int_E f = 0$. Definimos

$$A_k = \left\{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

Así que

$$A = \{x \in E \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Si $\mu^*(A) > 0$, entonces $\mu^*(A_k) > 0$ para alguna k y obtenemos

$$\int_E f \geq \int_{A_k} f \geq \frac{1}{k}\mu^*(A_k) > 0$$

la contradicción muestra que $\mu^*(A) = 0$. Por lo tanto $f = 0$ c.t.p. en E □