Álgebra de conjuntos

Definición 1. *Álgebra de conjuntos. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{A}$ es una álgebra de conjuntos si satisface:*

a) $X \in \mathcal{A}$

b) *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

c) *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$*

Ejemplo Dado un conjunto X, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(X)$ (conjunto potencia de X) y $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X\}$, son álgebras de conjuntos.

Proposición 1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de X. Entonces se cumple para todo $A, B \in \mathcal{A}$ que*

$$A \cap B \in \mathcal{A}$$

además, si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Demostración. Si A,B pertenecen al álgebra $\mathcal{A}$, también $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ entonces por ley D'morgan

$$A \cap B = X \setminus (A^c \cup B^c) \in \mathcal{A}$$

□

Proposición 2. *Sea $\mathcal{C}$ cualquier colección de subconjuntos de X. Entonces existe un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y además, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ para cualquier álgebra $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las álgebras de subconjuntos de X que contienen a $\mathcal{C}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que al menos se tiene $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{F}$; colocamos

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B}$$

Entonces,

a) $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, por lo tanto, $\mathcal{C}$ pertenece a la intersección $\mathcal{A}$, de todas estas álgebras $\mathcal{B}$.

b) $\mathcal{A}$ es un algebra de conjuntos ya que:

   a) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces, para toda $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ se tiene que, $A, B \in \mathcal{B}$, así

$$A \cup B \in \bigcap \mathcal{B} = \mathcal{A}$$

b) Si $A \in \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$ se cumple que $A^c \in \mathcal{B}$ para toda álgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, por lo tanto,

$$A^c \in \bigcap \mathcal{B} = \mathcal{A}$$

c) Si $\mathcal{B}_0$ es un álgebra de conjuntos que contiene a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{F}$ y

$$\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$$

□

Proposición 3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathcal{A}$, entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}$ tal que*

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \; si \; i \neq j \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Demostración. Sea $B_1 = A_1$ y para $1 < k \leq n$, $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$. Entonces, $B_i \subset A_i$ para $i = 1, 2, ...$

Por otra parte si $j < k$ y $x \in B_j \subset A_j$ entonces $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y por tanto, $x \notin A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = B_k$. En consecuencia, $B_j \cap B_k = \emptyset$ si $j < k$. Intercambiando el rol de j y k tendremos $B_j \cap B_k = \emptyset$ si $j \neq k$.

Como $B_i \subset A_i$ para todo $i = 1, ...$, es claro que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, x pertenece a algún A_i, sea r el menor índice tal que $x \in A_r$, entonces $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$, es decir, $x \in B_r \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ □

$\sigma-$álgebra de conjuntos

Definición 2. *(σ-álgebra). Diremos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X es una $\sigma-$álgebra de conjuntos si satisface*

a) $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos

b) Para cualquier sucesión $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ del álgebra $\mathcal{A}$, se cumple que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo Dado un conjunto X, tanto el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ como la colección trivial $\{X, \emptyset\}$ son $\sigma-$álgebras de subconjuntos de X.

Proposición 4. $\emptyset \in \mathcal{A}$

Demostración. Por (a) $X \in \mathcal{A}$ y también $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$ □

Proposición 5. *Sea $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de $\sigma-$álgebras de subconjuntos de X. Entonces*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

es una $\sigma-$álgebra

Demostración. Tenemos que

a) Si $X \in \mathcal{A}_i \ \forall\ i \in I$, $X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

b) Si $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ entonces $A^c \in \mathcal{A}_i \ \forall\ i \in I$ por lo tanto

$$A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

c) Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ entonces $A_k \in \mathcal{A}_i \ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ i \in I$ por lo que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_i\ i \in I$ por lo tanto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

□

Proposición 6. *Dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, existe una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}$ y para cualquier otra σ- álgebra $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que contenga a la colección C , se cumple $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(x) \mid \mathcal{A}\ es\ \sigma - \acute{a}lgebra\ \ y\ \ \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}$$

se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{F}$.
Sea

$$\mathcal{A}_1 = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

se tiene que $\mathcal{A}_1$ es una $\sigma-$álgebra y claramente $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_1$.
Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(x)$ es una $\sigma-$álgebra con $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}$.
Finalmente, si $\mathcal{A}_1'$ es una $\sigma-$álgebra $\subset \mathcal{P}(x)$ que satisface lo anterior entonces $\mathcal{A}_1' \subset \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_1'$, lo cual establece su unicidad □

Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra contenida en $\mathcal{P}(x)$, tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ se llama el $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{C}$

Teorema 1. *Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(x)$ entonces:*

a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \ \Rightarrow\ \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}')$

b) Si $\mathcal{C}$ es una $\sigma-$álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

c) $\sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$

d) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}')$ *y* $\mathcal{C}' \subset \sigma(\mathcal{C}) \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}')$

Demostración. Tenemos que

a) $\sigma(\mathcal{C}')$ es una $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, $\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}')$

b) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ y es una $\sigma-$álgebra, $\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$

c) se sigue de la anterior

d) por (a) y (b) se tiene

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma(\mathcal{C}')$$
$$\sigma(\mathcal{C}') \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$$

lo anterior implica $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}')$

□