Lema 1. *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa. Si $\varphi = 0$ c.t.p. en E entonces*

$$\int_E \varphi = 0$$

Demostración. Sea $A = \{x \in E \mid \varphi \neq 0\}$. Por hipótesis $\mu^*(A) = 0$.
Si

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

y consideramos

$$I = \{k \mid a_k > 0\}$$

a) Si $I = \emptyset$ entonces $\displaystyle\int_E \varphi = 0$

b) Si $I \neq \emptyset$ se tiene que $\mu^*(E_k) = 0$ cuando $k \in I$ por lo tanto

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu^*(E_k) = 0$$

□

Teorema 1. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea f una función medible, no negativa definida en E. Entonces*

$$\int_E f = 0 \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad f = 0, \quad c.t.p. en\ E$$

Demostración. Supongamos que $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ es una función simple. Si $\varphi(x) = 0$ c.t.p en E y $a_i > 0$ entonces $\mu^*(A_i \cap E) = 0$ y por tanto

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i \cap E) = 0$$

Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de funciones simples que tienden a f para todo $x \in E$ Si $f = 0$ c.t.p. en E, entonces

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_{i+1}(x) \leq f(x)$$

se tien que $\varphi_i = 0$ c.t.p. en E para toda i. Por lo tanto

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_i = 0$$

Ahora supongamos que $\displaystyle\int_E f = 0$. Definimos

$$A_k = \left\{ x \in E \mid f(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

Así que

$$A = \{x \in E \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Si $\mu^*(A) > 0$, entonces $\mu^*(A_k) > 0$ para alguna k y obtenemos

$$\int_E f \geq \int_{A_k} f \geq \frac{1}{k}\mu^*(A_k) > 0$$

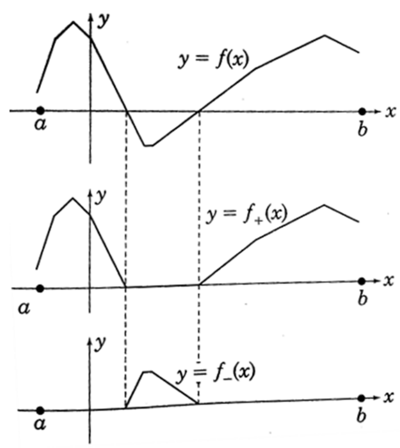
la contradicción muestra que $\mu^*(A) = 0$. Por lo tanto $f = 0$ c.t.p. en E □

La integral de Lebesgue de funciones medibles

Definición 1. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & si \quad f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & si \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

geométricamente



Sea A un conjunto arbitrario y $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Una manera de representar una función f es haciendo $f = g - h$ siendo $g, h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones no negativas, es decir considerar $g = f^+$ y $h = f^-$.

Definición 2. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea f una función medible en E. decimos que f tiene una integral de lebesgue sobre E si al menos uno de las integrales*

$$\int_E f^+, \qquad \int_E f^-$$

es finita. En ese caso definimos la integral de Lebesgue de f en E

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

decimos que f es lebesgue integrable en E si la integral de lebesgue de f en E existe y es finita