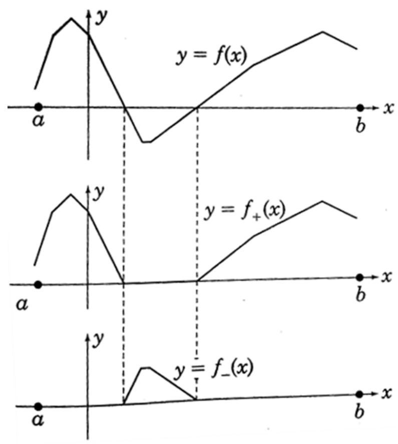
La integral de Lebesgue de funciones medibles

Definición 1. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & si \quad f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & si \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

geométricamente



Sea A un conjunto arbitrario y $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Una manera de representar una función f es haciendo $f = g - h$ siendo $g, h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones no negativas, es decir considerar $g = f^+$ y $h = f^-$.

Definición 2. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea f una función medible en E. decimos que f tiene una integral de lebesgue sobre E si al menos uno de las integrales*

$$\int_E f^+, \quad \int_E f^-$$

es finita. En ese caso definimos la integral de Lebesgue de f en E

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

decimos que f es lebesgue integrable en E si la integral de lebesgue de f en E existe y es finita

Teorema 1. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y f una función Lebesgue integrable en E. Entonces*

a) para todo $\alpha > 0$, el conjunto

$$E_\alpha = \{t \in E \mid |f(t)| > \alpha\}$$

tiene medida finita

b) f toma valores finitos en casi todas partes en E

Demostración. a) Dado que f es Lebesgue integrable en E, entonces f^+ y f^- son Lebesgue integrables en E. Fijamos un $\alpha > 0$. Entonces

$$E_\alpha = \{t \in E \mid f^+(t) > \alpha\} \cup \{t \in E \mid f^-(t) > \alpha\} = E_{\alpha^+} \cup E_{\alpha^-}$$

Ahora bien

$$\int_E f^+ \geq \int_{E_{\alpha^+}} f^+ \geq \alpha\mu^*(E_{\alpha^+}) > 0$$

$$\int_E f^- \geq \int_{E_{\alpha^-}} f^- \geq \alpha\mu^*(E_{\alpha^-}) > 0$$

Entonces

$$\mu^*(E_{\alpha^+}) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E f^+ < \infty$$

$$\mu^*(E_{\alpha^-}) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E f^- < \infty$$

de donde

$$\mu^*(E_\alpha) \leq \mu^*(E_{\alpha^+}) + \mu^*(E_{\alpha^-}) < \infty$$

b) Ahora bien, para todo $\alpha > 0$, tenemos

$$\{t \in E \mid f^+(t) = \infty\} \subset \{t \in E \mid f^+(t) > \alpha\}$$

esto impkica, para toda $\alpha > 0$,

$$\mu^*(\{t \in E \mid f^+(t) = \infty\}) \leq \mu^*(\{t \in E \mid f^+(t) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E f^+$$

haciendo $\alpha \to \infty$ se tiene

$$\mu^*(\{t \in E \mid f^+(t) = \infty\}) = 0$$

De manera análoga obtenemos que

$$\mu^*(\{t \in E \mid f^-(t) = \infty\}) = 0$$

Dado que $|f(t)| = f^+ + f^-$ se sigue que

$$\mu^*(\{t \in E \mid |f(t)| = \infty\}) = \mu^*(\{t \in E \mid f^+(t) = \infty\}) + \mu^*(\{t \in E \mid f^-(t) = \infty\}) = 0$$

por lo tanto f toma valores finitos c.t.p. en E.

$\square$

Teorema 2. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces f es Lebesgue integrableven E si y sólo si $|f|$ es Lebesgue integrable en E. Además en este caso se cumple la desigualdad del triángulo*

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$$

Demostración. Supongamos que f es Lebesgue integrable en E. Entonces ambas funciones f^+, f^- son Lebesgue integrables en E. Según lo anterior $|f|$ tiene medida finita en E. Dado que $|f| = f^+ + f^-$ se tiene

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- < \infty$$

y por lo tanto $|f|$ es Lebesgue integrable en E.
Por otro lado si $|f|$ es Lebesgue integrable en E, tenemos que $\displaystyle\int_E |f| < \infty$. Dado que $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$ se sigue

$$\int_E f^+ \leq \int_E |f|, \quad y \quad \int_E f^+ \leq \int_E |f|$$

esto muestra que ambas integrales $\displaystyle\int_E f^+$ y $\displaystyle\int_E f^-$ son finitas y como $f = f^+ - f^-$, tenemos

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- < \infty$$

y por lo tanto f es Lebesgue integrable en E. Finalmente

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E f^+ + f^- = \int_E |f|$$

□