La integral de Lebesgue de funciones medibles (continuación)

Teorema 1. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Si $f = 0$ c.t.p. en E, entonces f es Lebesgue integrable en E y* $\displaystyle\int_E f = 0$

Demostración. Dado que $0 = f = f^+ = f^-$ c.t.p. en E, se sigue

$$\int_E f^+ = \int_E f^- = 0$$

y entonces

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = 0$$

□

Ejemplo El regreso del resultado anterior no siempre es cierto, consideremos la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{[-1,1]} f = \int_{[-1,0]} f + \int_{[0,1]} f = -1 + 1 = 0$$

pero $f \neq 0$ c.t.p. en $[-1, 1]$ y $\mu^*([-1, 1]) \neq 0$

Teorema 2. *Suponga que f es Lebesgue integrable en un conjunto E de $\mathbb{R}$ si $\displaystyle\int_A f = 0 \ \forall \ A \subset E$, entonces $f = 0$ c.t.p. en E.*

Demostración. Definimos

$$A_{0^+} = A \cap \{x \in E \mid f(x) > 0\}, \quad A_{0^-} = A \cap \{x \in E \mid f(x) < 0\}$$

entonces

$$\int_A f^+ = \int_{A_{0+}} f \quad y \quad \int_A f^- = \int_{A_{0-}} f$$

Asi que

$$\int_A f^+ = 0 \quad y \quad \int_A f^- = 0$$

para todo subconjunto medible $A \subset E$.
Definimos

$$A_{k^+} = \left\{x \in E \mid f^+(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

entonces

$$0 = \int_{A_{k^+}} \geq \frac{1}{k}\mu^*(A_{k^+})$$

por lo que $\mu^*(A_{k^+}) = 0$. Dado que

$$A_{k^+} = \{x \in E \mid f^+(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k^+}$$

se tiene

$$\mu^*(A_{k^+}) = \mu^*(\{x \in E \mid f^+(x) > 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_{k^+}) = 0$$

esto muestra que $f^+ = 0$ c.t.p. en E.
Análogamente definimos

$$A_{k^-} = \left\{x \in E \mid f^-(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

entonces

$$0 = \int_{A_{k^-}} \geq \frac{1}{k}\mu^*(A_{k^-})$$

por lo que $\mu^*(A_{k^-}) = 0$. Dado que

$$A_{k^-} = \{x \in E \mid f^-(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k^-}$$

se tiene

$$\mu^*(A_{k^-}) = \mu^*(\{x \in E \mid f^-(x) > 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_{k^-}) = 0$$

esto muestra que $f^- = 0$ c.t.p. en E. Por lo tanto $f = f^+ - f^- = 0$ c.t.p. en E □

Teorema 3. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funciones medibles.
Si $|f| \leq g$ c.t.p. en E y g es Lebesgue integrable en E. Entonces f es lebesgue integrable en E*

Demostración. Definimos

$$A = \{x \in E \mid |f(x)| > g(x)\}$$

Se tiene que $\mu^*(A) = 0$ por tanto

$$\int_A |f| = \int_A g = 0$$

Dado que $|f|$ y g son no negativas y medibles, tenemos que

$$\int_E |f| = \int_{E\setminus A} |f| + \int_A |f| = \int_{E\setminus A} |f| \leq g = \int_{E\setminus A} g + \int_A g = \int_E g$$

Dado que g es Lebesgue integrable en E también lo es $|f|$ y por lo tanto f será también Lesbesgue integrable. □