La integral de Lebesgue de funciones medibles (continuación 2)

Teorema 1. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable en E. Entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que*

$$\left|\int_A f\right| < \epsilon$$

para todo subconjunto medible $A \subset E$ con $\mu^*(A) < \delta$

Demostración. Dado que f es Lebesgue integrable en E también lo es $|f|$. Definimos

$$f_k(x) = \min\{|f(x)|, k\}$$

asi que $f_k \geq 0$ y $\{f_k\} \to |f|$. Por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E |f|$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos k tal que

$$\int_E |f| - f_k < \frac{\epsilon}{2}$$

y elegimos $\delta > 0$ que satisfaga $0 < \delta < \dfrac{\epsilon}{2k}$. Entonces para cada subconjunto medible $A \subset E$ con $\mu^*(A) < \delta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_A |f| &\leq \int_A (|f| - f_k) + \int_A f_k \\
&< \frac{\epsilon}{2} + k\mu^*(A) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + k\delta \\
&< \frac{\epsilon}{2} + k\frac{\epsilon}{2k} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| < \epsilon$$

□

Teorema 2. *Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}$ y sea $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funciones medibles.*
Si f es Lebesgue integrable en E y $f = g$ c.t.p. en E, entonces g es Lebesgue integrable en E y

$$\int_E f = \int_E g$$

Demostración. Notamos que $f^+ = g^+$ c.t.p. en E y también $f^- = g^-$ c.t.p. en E. Si consideramos $g^+ \leq f^+$ y $g^- \leq f^-$ obtenemos

$$\int_E g^+ \leq \int_E f^+ \quad y \quad \int_E g^- \leq \int_E f^-$$

intercambiando los roles de f^+, g^+ y f^-, g^- obtenemos

$$\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \quad y \quad \int_E f^- \leq \int_E g^-$$

se sigue entonces

$$\int_E f^+ = \int_E g^+ \quad y \quad \int_E f^- = \int_E g^-$$

por lo tanto

$$\int_E g = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E f$$

□

Corolario 1. *Suponga que E es un conjunto medible ne $\mathbb{R}$ y $f, g, h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles. Si $g \leq f \leq g$ c.t.p. en E y si f, h son Lebesgue integrables en E, entonces f es Lebesgue integrable en E.*

Teorema 3. *Linealidad. Supongamos que las funciones f, g son Lebesgue integrables en un conjunto medible E. Entonces para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es Lebesgue integrable en E y*

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

Demostración.

1. Si $\alpha, \beta \geq 0$ y f, g son no negativas en E. Entonces según lo probado anteriormente, el resultado es cierto.

2. Si $\alpha < 0$, entonces $(\alpha\ f)^+ = -\alpha f^-$ y $(\alpha\ f)^- = -\alpha f^+$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_E \alpha\ f &= \int_E (\alpha\ f)^+ - \int_E (\alpha\ f)^- \\ &= -\alpha \int_E f^- + \alpha \int_E f^+ \\ &= \alpha \left(\int_E f^+ - \int_E f^- \right) \\ &= \alpha \int_E f \end{aligned}$$

3. Si f y g son no negativas y $h = f - g$, $h^+ = f$ y $h^- = g$ entonces h esta definida y es finita c.t.p. en E, tenemos

$$\int_E f - g = \int_E h = \int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f - \int_E g$$

Consecuentemente, para funciones f,g Lebesgue integrables

$$\begin{aligned}\int_E (f+g) &= \int_E (f^+ - f^- + g^+ - g^-)\\ &= \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-)\\ &= \left(\int_E f^+ - \int_E f^-\right) + \left(\int_E g^+ - \int_E g^-\right)\\ &= \int_E f + \int_E g\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Teorema de convergencia dominada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$. Suponga que $\{f_n\}$ converge puntualmente c.t.p. en E y que hay funciones integrables de Lebesgue h y g tal que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ para toda n y para toda $x \in E$. Entonces f es Lebesgue integrable en E y*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Demostración. Tenemos que por hipótesis las funciones $f_n - g$ y $h - f_n$ para todo n, son no negativas c.t.p. en E. Aplicando el Lema de Fatou

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n - \int_E g &= \int_E \liminf_{n\to\infty} (f_n - g)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n - g)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n - \int_E g\end{aligned}$$

por tanto

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p. en E, se sigue que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = f \quad c.t.p. \ \ en\ E$$

y entonces

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

aplicando el Lema de Fatou a $h - f_n$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_E h - \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n &= \int_E \liminf_{n\to\infty} (h - f_n)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (h - f_n)\\ &= \int_E h - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\end{aligned}$$

por tanto

$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p. en E, se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = f \quad c.t.p. \;\; en \; E$$

y entonces

$$\int_E f \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Por tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

$\square$

Si la medida del conjunto E es finita, las funciones constantes son Lebesgue integrables sobre E. Obtenemos

Teorema 5. *teorema de convergencia acotada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en un conjunto E de medida finita. Supongamos que existe un número M tal que $|f_n| \leq M$ para toda n y para casi todo $x \in E$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad c.t.p. \;\; en \; E$$

entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$