La integral de Lebesgue de funciones medibles (continuación 3)

Teorema 1. *Teorema de convergencia dominada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$. Suponga que $\{f_n\}$ converge puntualmente c.t.p. en E y que hay funciones integrables de Lebesgue h y g tal que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ para toda n y para toda $x \in E$. Entonces f es Lebesgue integrable en E y*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Si la medida del conjunto E es finita, las funciones constantes son Lebesgue integrables sobre E. Obtenemos

Teorema 2. *teorema de convergencia acotada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en un conjunto E de medida finita. Supongamos que existe un número M tal que $|f_n| \leq M$ para toda n y para casi todo $x \in E$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{c.t.p. en } E$$

entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Corolario 1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Lebesgue integrables. Si $f_{n+1} \geq f_n$, entonces la integral de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ existe y*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n \int_E f_n$$

Demostración. Hagamos $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.
Tenemos que

$$f^+ = \lim_{n\to\infty} f_n^+, \quad f^- = \lim_{n\to\infty} f_n^-$$

como $f_{n+1} \geq f_n$ resulta que

$$f_{n+1}^+ \geq f_n^+, \quad f_{n+1}^- \leq f_n^-$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona

$$\int_E f^+ = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^+$$

A partir de $f_1^- \geq f_n^-$ y de que f_1 es Lebesgue integrable, aplicando el teorema de convergencia dominada

$$\int_E f^- = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^- \leq \int_E f_1^- < \infty$$

Según lo anterior $\displaystyle\int_E f$ existe y

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^+ - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^- = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^+ - f_n^- = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

En particular si $\left\{\int_E f_n\right\}$ es acotada entonces $\lim_{n\to\infty} f_n$ es Lebesgue integrable.

si $\left\{\int_E f_n\right\}$ es acotada entonces

$$\left|\int_E f_n\right| \leq M \;\Rightarrow\; \left|\int_E f\right| < \infty$$

Por lo tanto f es Lebesgue integrable □

Relación integral de Riemann con integral de Lebesgue

Teorema 3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$, entonces f es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y*

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$$

Demostración. Sea $\{Q_i\}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que

a) $\lim_{j\to\infty} \|Q_j\| = 0$

b) $\lim_{j\to\infty} L(f,Q_j) = \underline{\int_a^b} f$

c) $\lim_{j\to\infty} U(f,Q_j) = \overline{\int_a^b} f$

Definimos la sucesión $\{P_k\}$ de particiones $P_k = \bigcup_{j=i}^{k} Q_j$, para cada $k = 1, 2, \ldots.$

Entonces $\{P_k\}$ es una sucesión tal que $P_k \subseteq P_{k+1}$ y satisface (a), (b) (c). Fijamos k y sea

$$P_k = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Dado que por hipótesis f es Riemann integrable en $[a,b]$ por tanto f es acotada en $[a,b]$. Sean

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

Escribimos $I_i = [x_{i-1}, x_i)$ y $\overline{I}_i = [x_{i-1}, x_i]$. Definimos dos funciones simples φ_k y ψ_k

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \chi_{I_i}(x) + m_n \chi_{\overline{I}_n}(x)$$

$$\psi_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \chi_{I_i}(x) + M_n \chi_{\overline{I}_n}(x)$$

Notamos que

$$(L)\int_a^b \varphi_k = L(P_k, f)$$

$$(L)\int_a^b \psi_k = U(P_k, f)$$

Además $\{\varphi_k(x)\}$ es una sucesión no decreciente de funciones que convergen a $m(x)$. Análogamente $\{\psi_k(x)\}$ es una sucesión no decreciente de funciones que convergen a $M(x)$.
Claramente

$$m(x) \leq f(x) \leq M(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona se sigue que m y M son Lebesgue integrables en $[a,b]$ y

$$(L)\int_a^b m = \lim_{k\to\infty} (L)\int_a^b \varphi_k = \lim_{k\to\infty} L(P_k, f) = (D)\underline{\int_a^b} f$$

$$(L)\int_a^b M = \lim_{k\to\infty} (L)\int_a^b \psi_k = \lim_{k\to\infty} U(P_k, f) = (D)\overline{\int_a^b} f$$

Dado que f es Riemann integrable en $[a,b]$, tenemos que

$$(D)\underline{\int_a^b} f = (D)\overline{\int_a^b} f$$

De esto se sigue que

$$(L)\int_a^b m = (L)\int_a^b M$$

Dado que $M(x) - m(x) \geq 0$ obtenemos $m(x) = M(x)$ c.t.p. en [a,b].
Finalmente dado que

$$m(x) \leq f(x) \leq M(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Se sigue que f es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y

$$(R)\int_a^b f(x)\, dx = (L)\int_a^b f(x)\, dx$$

$\square$

Teorema fundamental del cálculo

Ejemplo Primero mostramos con un ejemplo que la derivada no es Lebesgue integrable. Para esto definimos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x^2 \ \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

donde su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 2x \ \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \left(\frac{2}{\pi}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & si \quad x \neq 0 \ \ (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

En este caso $f'(x)$ no es acotada y por lo tanto no es Riemann integrable en $[0,1]$. Debemos mostrar que $f' \notin L[0,1]$. Supongamos que $f' \in L[0,1]$ entonces $|f'| \in L[0,1]$. Definimos

$$a_i \frac{1}{\sqrt{i+1}}, \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{i}} \quad para \ \ i = 1, 2, 3, ...$$

Entonces

$$(L)\int_{a_i}^{b_i} |f'| \geq \left|(L)\int_{a_i}^{b_i} f'\right| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \geq \frac{2}{i+1}$$

En consecuencia

$$(L)\int_0^1 |f'| \geq \sum_{i=1}^{n} (L)\int_{a_i}^{b_i} |f'| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i+1}$$

Dado que la serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i+1}$ diverge cuando $n \to \infty$, se tiene entonces que $|f| \notin L[0,1]$. Y Dado que una función es Lebesgue integrable si y sólo si su valor absoluto lo es, entonces $f \notin L[0,1]$

Teorema 4. *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tiene derivada acotada $|f'| \leq M$ en cada punto de $[a,b]$ entonces $f' \in L[a,b]$ y*

$$(L)\int_a^b f'(x) \ dx = f(b) - f(a)$$

Demostración. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es tal que f' toma sólo valores finitos en cada punto de $[a,b]$ entonces f' es medible en $[a,b]$.
Claramente f es continua en $[a,b]$.
Definimos $f(x) = f(b)$ para $x > b$ y definimos

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que f_n es continua en $[a,b]$ y $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a $f'(x)$ en $[a,b]$. Como una función continua es medible y f' es el límite de funciones medibles, entonces f' es medible.
Dado que f' es acotada existe m, M tal que

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall \ x \in [a,b]$$

Sea $P: \ m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$ una partición de $[m, M]$ con $|y_i - y_{i-1}| < \epsilon$.
Sea

$$E_i = \{x \in [a,b] \mid y_{i-1} \leq f'(x) \leq y_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

definimos

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\chi_{E_i}(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{E_i}(x)$$

entonces $\varphi(x) \leq f'(x) \leq \psi(x)$, al ser $\varphi,\ \psi$ simples, son Lebesgue integrables. Por lo tanto f' es Lebesgue integrable.
Definimos $f(x) = f(b)$ para $b < x \leq b+1$ y definimos $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad n \in \mathbb{N}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio $\forall\ n,\ n > \dfrac{1}{b-a}$ y $\forall\ x \in \left[a, b - \dfrac{1}{n}\right]$ existe un punto $y_{n_x} \in [a,b]$ tal que $f_n(x) = f'(y_{n_x})$.
Para $x \in \left[b - \dfrac{1}{n}, b\right]$ se tiene $n(b-x) \leq 1$ y el punto $y_{n_x} \in [a,b]$ tal que

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \frac{f(b) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n(b-x) f'(y_{n_x}) \leq f'(y_{n_x})$$

Si f' es acotada entonces $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.
Dado que $\{f_n\} \to f'$ en $[a,b]$. Aplicando el teorema de convergencia acotada

$$\begin{aligned}
(L)\int_a^b f' &= \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[(L)\int_a^b n\ f\left(x + \frac{1}{n}\right)\ dx - (L)\int_a^b n\ f(x)\ dx \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[n(L)\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dx - n(L)\int_a^b f(x)\ dx \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left[(L)\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\ dx + (L)\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dx - (L)\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dx - \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\ dx \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left[(L)\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dx - (L)\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dx \right]
\end{aligned}$$

f es continua en $[a, b+1]$ y es Riemann integrable en $[a, b+1]$ y cada subintervalo. Por lo tanto

$$(L)\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \left[n(R)\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dx - n(R)\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dx \right]$$

Aplicando el teorema del valor medio $\forall\ a_n,\ b_n$ con $a \leq a_n \leq a + \dfrac{1}{n}$, $b \leq b_n \leq b + \dfrac{1}{n}$ tal que

$$n(R) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ dx = f(a_n) \quad y \quad n(R) = \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\ dx = f(b_n)$$

Obtenemos entonces

$$(L)\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty}[f(b_n) - f(a_n)]$$

como f es continua en $[a, b+1]$ se sigue que

$$(L)\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

$\square$