El espacio de las funciones Lebesgue integrables

Mostraremos que la integral de Lebesgue es en realidad es una extensión adecuada de la integral de Riemann en el sentido de completar R [a, b], con la métrica en L [a, b].
Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y sea $L_1(E)$ el espacio de todas las funciones reales Lebesgue integrables en el conjunto E.
Se define la norma $\|\|_1$ en $L_1(E)$ como

$$\|f\|_1 = \int_E |f|$$

y la llamamos $L_1(E)$-norma.
La métrica inducida por la norma $\|\|_1$ será

$$d_1(f,g) = \int_E |f-g| \quad \forall\ f,g \in L_1(E)$$

Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea (X,d) un espacio métrico.

Definición 1. *Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice que converge a $x \in X$ si $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x) < \epsilon$ cuando $n \geq N$. Llamamos x a el limite de la sucesión $\{x_n\}$*

Definición 2. *Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice que es de Cauchy en X si $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m) < \epsilon$ cuando $n,m \geq N$.*

Observamos que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy

Definición 3. *Un espacio métrico (X,d) se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X.*

Vamos a probar que el espacio $L_1(E)$ es completo bajo la métrica d_1.

Teorema 1. *Teorema de Riez-Fischer.*
Sea E un conjunto medibley sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(L_1(E),d_1)$. Entonces existe $f \in L_1(E)$ tal que $\{f_n\}$ converge a f con la métrica d_1

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(L_1(E)$ y consideremos la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que

$$d_1(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$$

De esto se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_1(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) < 1$$

Definimos

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

Entonces la sucesión $\{g_k\}$ es creciente y converge a la función g definida

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

Dado que
$$\int_E g_k < 1$$
usando el teorema de convergencia monótona se sigue que g es Lebesgue integrable en E.
Sea
$$A = \{x \in E \mid \sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]\}$$
si la serie converge absolutamente en x.
Definimos f en E como
$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

□

Entonces
$$\left|\sum_{j=1}^{k}[f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)]\right| \leq g_k(x) \leq g(x) \quad x \in E$$
Aplicando el teorema de convergencia dominada se tiene que f es Lebesgue integrable en E y
$$d_1(f + f_{n_1}, f_{n_{k+1}}) = \int_E |f + f_{n_1} - f_{n_{k+1}}| = \int_E \left| f - \sum_{j=1}^{k}[f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)]\right|$$
Dado que $d_1(f + f_{n_1}, f_{n_{k+1}}) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto muestra que $f_{n_k} \to f + f_{n_1}$. Dado que f y f_{n_1} son Lebesgue integrables, la suma $f + f_{n_1}$ es Lebesgue integrable en $L_1(E)$. Sólo falta ver que $f_n \to f + f_{n_1}$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Dado que $\{f_n\}$ es de una sucesión de Cauchy e $L_1(E)$ y $\{f_{n_k}\}$ converge a $f + f_{n_1}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k, n > N$ entonces
$$\int_E |f_{n_k} - f_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \int_E |(f + f_{n_1}) - f_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$$
Fijando $n_k > N$, para $n > N$ tenemos
$$\int_E |(f + f_{n_1}) - f_n| \leq \int_E |(f + f_{n_1}) - f_{n_k}| + \int_E |f_n - f_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$
Esto implica que $\{f_n\}$ converge a $f + f_{n_1}$ con la métrica d_1