El espacio L^2

El espacio L_1 es, un espacio lineal normado completo (esto es, un espacio de Banach). Sin embargo no es euclideo: la norma definida en él no se puede introducir mediante ningún producto escalar. Para comprobar esto, veremos que para las funciones $f(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ la relación conocida como ley del paralelogramo

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

No se cumple pues

$$\|f+g\|_1^2 = \left(\int_0^{2\pi} (1+\operatorname{sen}(x))\ dx\right)^2 = (2\pi)^2 = 4\pi^2$$

$$\|f-g\|_1^2 = \left(\int_0^{2\pi} (1-\operatorname{sen}(x))\ dx\right)^2 = (2\pi)^2 = 4\pi^2$$

por tanto

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = (4\pi^2) + (4\pi^2) = 8\pi^2$$

Mientras que

$$\|\operatorname{sen}(x)\|_1^2 = \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x)\ dx\right)^2 = \pi$$

$$\|1\|_1^2 = \left(\int_0^{2\pi}\ dx\right)^2 = 2\pi$$

por tanto

$$2(\|\operatorname{sen}(x)\|_1^2 + \|1\|_1^2) = 2(\pi + 2\pi) = 2(3\pi) = 6\pi$$

de manera que

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = (4\pi^2) + (4\pi^2) = 8\pi^2 \neq 6\pi = 2(\|\operatorname{sen}(x)\|_1^2 + \|1\|_1^2)$$

Definición 1. *Una función f se llama de cuadrado integrable en X cuando la integral*

$$\int f^2$$

existe (es finita).

El conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en X se designa con $L_2(X, \mu)$ o, brevemente L_2.

Espacio Lineal Las propiedades de las funciones de cuadrado integrable son:

1. El producto de dos funciones de cuadrado integrable es una función de cuadrado integrable. Esto se desprende directamente de la desigualdad

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

   y de las propiedades de la integral de Lebesgue.

2. La suma de dos funciones de L_2 es también de L_2. En efecto,
$$[f(x)+g(x)]^2 \leq f^2(x) + 2|f(x)g(x)| + g^2(x)$$
y de acuerdo con la propiedad 1, cada una de las tres funciones del lado derecho es integrable
3. Si $f \in L_2$ y α es un número arbitrario, entonces $\alpha f \in L_2$.
En efecto, si $f \in L_2$ tenemos,
$$\int [\alpha f]^2 = \alpha^2 \int f^2 < \infty$$
Las propiedades (2) y (3) muestran que las combinaciones lineales de funciones de L_2 son de nuevo elementos de L_2; además es claro que la suma de funciones L_2 y la multiplicación de las mismas por números verifican todas las condiciones de la definición de un espacio lineal. Luego, el conjunto L_2 de funciones de cuadrado integrable constituye un espacio lineal.

Producto Escalar Definamos el producto escalar en L_2 tomando
$$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)$$
Es claro que las condiciones que todas las condiciones de la definición de un producto escalar, a saber

1. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
2. $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$
3. $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$
4. $\langle f, f\rangle > 0$ cuando $f > 0$

se cumplen en este caso.

Definición 2. *Se llama espacio L_2 al espacio euclídeo, cuyos elementos son las clases de funciones equivalentes de cuadrado integrable, en el que las operaciones de adición y multiplicación por números se definen como las operaciones habituales de adición y multiplicación y el producto escalar se define mediante la fórmula*
$$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)$$
En L_2, al igual que en cualquier espacio euclídeo, tiene lugar la desigualdad de Cauchy, que toma en este caso la forma
$$\left(\int f(x)g(x)\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$$
y la desigualdad triangular, que toma la forma
$$\sqrt{\int [f(x)+g(x)]^2} \leq \sqrt{\int [f(x)]^2} + \sqrt{\int [g(x)]^2}$$
En particular para $g(x) = 1$ obtenemos la desigualdad
$$\left(\int f(x)\right)^2 \leq \mu(X)\int f^2$$

La métrica sería

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_2 = \sqrt{\int [f(x)-g(x)]^2}$$

se llama también desviación cuadrática entre las funciones f y g.
La convergencia de una sucesión funcional en el sentido de la métrica del espacio L_2 se llama convergencia cuadrática.

Teorema 1. *El espacio L_2 es completo*

Demostración. Sea f_n una sucesión de Cauchy de L_2, es decir

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \;\; para \;\; n,m \to \infty$$

Según resultados anteriores

$$\int |f_m(x) - f_m(x)| \leq (\mu(X))^{\frac{1}{2}} \left(\int [f_n(x) - f_m(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon [\mu(x)]^{\frac{1}{2}}$$

esto es, la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy también respecto a la mátrica del espacio L_1.
Ahora bien, si consideramos una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge casi en todas partes hacia una función f. En la desigualdad

$$\int [f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)]^2 < \epsilon$$

que es válida para elementos de esta sucesión parcial con k y l suficientemente grandes, usando el Lema de Fatou, al límite para $l \to \infty$. Tendremos

$$\int [f_{n_k}(x) - f(x)]^2 \leq \epsilon$$

de donde se deduce que $f \in L_2$ y que $f_{n_k} \to f$.
Por tanto toda sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión convergente converge hacia el mismo límite □

Convergencia cuadrática Al introducir en el espacio L_2 la norma, hemos definido con ello para las funciones de cuadrado integrable el siguiente concepto de convergencia

$$f_n \to f$$

cuando

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f(x)]^2 = 0$$

Esta convergencia es conocida como convergencia cuadrática.
Supongamos que la medida del espacio X en el que están definidas las funciones es finita.

1. Si la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de L_2 converge en la métrica de L_2, también converge en la métrica de L_1.
   En efecto, debido a la desigualdad antarior, tenemos

   $$\int |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\mu(X) \int (f_n(x) - f(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   y de aquí se desprende nuestra afirmación.

2. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente, también converge cuadráticamente.
   En efecto, cualquiera que sea $\epsilon > 0$, tenemos para n suficientemente grande

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

   y, consecuentemente

$$\int |f_n(x) - f(x)|^2 < \epsilon^2 \mu(X)$$

   de donde se deduce nuestra afirmación.
3. Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones converge en media, también converge en medida.
   Esta afirmación se desprende directamente de la desigualdad de Chébishev.
4. Si una sucesión $\{f_n\}$ converge en media, se puede extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ convergente casi en todas partes.
   Esto se mostro al probar complitud de L_2.