Conjuntos Ortonormales

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial con producto interno $(V, \langle , \rangle)$ y sea S un subconjunto de V. Se dice que S es un conjunto ortogonal de vectores de V si cada par de vectores distintos son ortogonales. En particular, si $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, S será ortogonal si, y solo si*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \|v_i\|^2 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

*Si además cada vector v del conjunto ortogonal S de V tiene norma 1, al conjunto S se le llama **conjunto ortonormal***

Ejemplo En el espacio vectorial $C[-1, 1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx$$

el conjunto infinito de vectores

$$S = \{\cos(2n\pi\ x), n = 0, 1, 2, ...\}$$

es un conjunto ortonormal.

Demostración. Tenemos que cada vector $v_n = \cos(2n\pi\ x)$ en S es unitario pues

$$\|v_n\| = \sqrt{\langle v_n, v_n \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx} = 1$$

Por otra parte, si $n \neq m$

$$\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(2n\pi\ x)\cos(2m\pi\ x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\cos(2(n+m)\pi\ x) + \cos(2(n-m)\pi\ x))\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(n+m)\pi}\operatorname{sen}(2(n+m)\pi) + \frac{1}{2(n-m)\pi}\operatorname{sen}(2(n-m)\pi)\right]$$

$$= 0$$

es decir los vectores v_n, v_m $(n \neq m)$ son ortogonales □

Coeficientes de Fourier

Definición 2. *Sea β un subconjunto ortonormal de un espacio V con producto escalar, y sea $x \in V$. Definimos los coeficientes de Fourier de x relativos a β como los escalares $\langle x, y \rangle$, donde $y \in \beta$*

Ejemplo Sea $V = \mathbb{R}^2$ y β una base ortonormal de V dada por

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Calcular los coeficientes de Fourier para $(3, 4)$ relativos a β
En este caso

$$\left\langle (3,4), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (3,4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

y también

$$\left\langle (3,4), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (3,4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo Sea $V = \mathbb{R}^3$ y β una base ortonormal de V dada por

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Calcular los coeficientes de Fourier para $(1, 1, 2)$ relativos a β
En este caso

$$\left\langle (1,1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y también

$$\left\langle (1,1,2), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

finalmente

$$\left\langle (1,1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$$

El espacio H Un espacio del producto escalar muy importante que se parece a $C[0, 1]$ es el espacio H de funciones continuas de valor complejo definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\ dt$$

Observaciones Sobre la integración de funciones de valor complejo.

1. El número imaginario i puede ser considerado como una constante bajo el signo de integración.
2. Toda función de valor complejo f puede escribirse como

$$f = f_1 + i\ f_2$$

donde f_1, f_2 son funciones de valor real.

3. Se tiene que
$$\int f = \int f_1 + i \int f_2$$
y tambiém
$$\overline{\int f} = \int \overline{f}$$

De estas observaciones, así como de la suposición de continuidad, se tiene que H es un espacio con producto interior.

Un conjunto ortonormal en H Defínase
$$S = \{e^{ijx} \mid j \text{ es un entero}\}$$

Se tiene entonces que
$$\begin{aligned}\langle e^{ijx}, e^{ikx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\overline{e^{ikt}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i(j-k)} e^{i(j-k)t}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

También se tiene
$$\langle e^{ijx}, e^{ijx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\overline{e^{ijt}}\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-j)t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1$$

es decir $\|e^{ijx}\| = 1$. Se tiene entonces que S es un conjunto ortonormal de H.

Ejemplo Sean $V = H$ y $f(x) = x$. Calculemos los coeficientes de Fourier de f relativos al conjunto ortonormal
$$S = \{e^{ijx} \mid j \text{ es un entero}\}$$

En este caso se tiene
$$\langle f, e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\ \overline{e^{int}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}\, dt = \frac{-1}{in}$$

Para el caso $n = 0$ se trabajará
$$\langle f, e^{i0x}\rangle = \langle f, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\ (1)\, dt = \pi$$

Si en L_2 se ha escogido un sistema $\{\phi_n\}$ completo ortogonal, todo elemento $f \in L_2$ puede ser representado com suma de la serie

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n$$

esto es, como suma de la serie de Fourier de la función f respecto al sistema ortogonal $\{\phi_n\}$.
De aquí se desprende

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n, f - \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n, f \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n, \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{C_n} \langle f, \phi_n \rangle - \sum_{n=1}^{N} C_n \langle \phi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^{N} C_n \overline{C_n} \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_k \rangle - C_n|^2
\end{aligned}$$

El valor mínino se alcanza cuando

$$C_n = \langle f, \phi_n \rangle \quad k = 1, ..., N$$

Con estos valores

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \quad (\textit{Identidad de Bessel})$$

Como el primer miembro es no negativo

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\textit{Desigualdad de Bessel})$$

Además, los coeficientes C_n, es decir los coeficientes de Fourier de la función f respecto al sistema $\{\phi_n\}$, se definen mediante las fórmulas

$$C_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int f(x) \phi_n(x)$$

$$\left(\|\phi_n\|^2 = \int \phi_n^2(x) \right)$$

Ejemplo Para el conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

se tiene

1. A es ortonormal pues

a) $\|1\|_2 = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \; dx} = \sqrt{2\pi}$

b) $\|\cos(nx)\|_2 = \sqrt{\langle \cos(nx), \cos(nx)\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \; dx} = \sqrt{\pi}$

c) $\|\operatorname{sen}(nx)\|_2 = \sqrt{\langle \operatorname{sen}(nx), \cos(nx)\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx) \; dx} = \sqrt{\pi}$

2. Para el conjunto A se acostumbre designar

$$\frac{a_0}{2}, \; a_n, \; b_n$$

sus coeficientes de Fourier son

a) $\frac{C_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx \;\; \Rightarrow \;\; a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx$

b) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \;\; \cos(nx) \; dx$

c) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \;\; \operatorname{sen}(nx) \; dx$

La serie correspondiente de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

y cualquiera que sea $f \in L_2$ converge cuadráticamente hacia esta función. Si

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

es la suma parcial de la serie de Fourier, la desviación cuadrática entre S_n y f puede ser encontrada mediante la fórmula

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

aplicando la desigualdad de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)$$

se tiene

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \leq= \|f\|^2 - \pi\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\right)$$

Para cualquier función $f \in L_2$ los cuadrados de sus coeficientes de Fourier forman una serie convergente. Viceversa si los números $a_0, \; a_n, \; b_n$ son tales que la serie

$$\sum \; a_n^2 + b_n^2$$

converge, la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

también converge (En L_2) y su suma es una función para la cual $a_0,\ a_n,\ b_n$ son sus coeficientes de Fourier.
El desarrollo anterior se hizo para $[-\pi, \pi]$, para extenderlo a cualquier intervalo $[-\ell, \ell]$, hacemos la sustitución $x = \frac{\pi t}{\ell}$, es decir, $t = \frac{\ell x}{\pi}$, convierte $f(t)$ en la función

$$f^*(x) = f\left(\frac{\ell x}{\pi}\right) \quad en\ [-\pi, \pi]$$

Y de acuerdo con esto

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ \cos\left(\frac{n\ \pi t}{\ell}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi t}{\ell}\right)$$

y la serie de Fourier para una función f definida en un intervalo de longitud 2ℓ es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\ \pi t}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi t}{\ell}\right)$$

En resumen cualquiera que sea $f \in L_2$ su serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

converge en media hacia la función dada f.
Para los problemas del análisis es importante encontrar las condiciones en que esta serie converge hacia f en otros sentidos

a) Puntualmente

b) Uniformemente.