Conjuntos borelianos

En los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$
$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \epsilon\}$$
la $\sigma-$álgebra es la generada por los subconjuntos abiertos O^n, el cual tiene la propiedad

a) $\emptyset, \ X \in O^n$

b) Si $U, \ V \in O^n \ \Rightarrow \ U \cap V \in O^n$

c) $U_i \in O^n, \ i \in I$ arbitraria $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in O^n$

Las tres condiciones definen una topología y el par (X, O) es un espacio topológico.

Definición 1. *La $\sigma-$álgebra $\sigma(O^n)$ generada por los conjuntos abiertos O^n de $\mathbb{R}^n$ es llamada $\sigma-$álgebra de borel $B(\mathbb{R}^n)$ y sus elementos se llaman conjuntos de borel o borel medibles*

Teorema 1. *Denotamos por O^n (abiertos de $\mathbb{R}^n$), C^n (cerrados de $\mathbb{R}^n$) y k^n (compactos de $\mathbb{R}^n$) entonces*
$$B(\mathbb{R}^n) = \sigma(O^n) = \sigma(C^n) = \sigma(k^n)$$

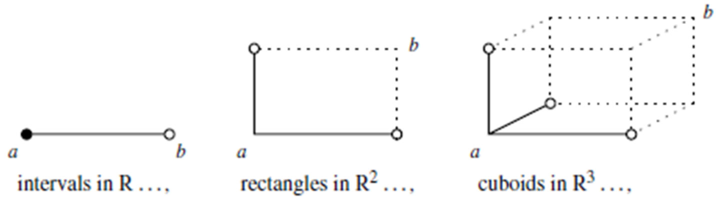
Demostración. Dado que los compactos son cerrados tenemos que $k^n \subset C^n$ y por tanto $\sigma(k^n) \subset \sigma(C^n)$. Por otro lado si $C \in C^n$, entonces $C_k = C \cap \overline{B_k(0)}$ es cerrado y acotado por lo que pertenece a k^n. Por construcción
$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$$
entonces $C^n \subset k^n$ y por tanto $\sigma(C^n) \subset \sigma(k^n)$.
Tenemos también que
$$(O^n)^c = \{U^c \mid U \in O^n\} = C^n \ y \ (C^n)^c = O^n$$
por lo que $C^n = (O^n)^c \subset \sigma(O^n)$, en consecuencia $\sigma(C^n) \subset \sigma(O^n)$. La otra inclusión es análoga $\square$

Ejemplo En $\mathbb{R}$ tenemos el siguiente conjunto
$$E = \{[a, b) \mid a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
e I denota la clase de intervalos abiertos con extremos en $\mathbb{R}$, tenemos que
$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \ \Rightarrow \ I \subset \sigma(E)$$
$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right) \ \Rightarrow \ E \subset \sigma(I)$$
concluimos entonces $\sigma(E) = \sigma(I) = B(\mathbb{R})$

Todo intervalo I es la unión de una familia numerable de intervalos de E y todo intervalo de E es la intersección numerable de intervalos de I.
En $\mathbb{R}^n$ la $\sigma-$álgebra de borel $B(\mathbb{R}^n)$ es generada por diferentes conjuntos, en particular nos interesan

$$\mathcal{L}^o = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)\}, \quad con \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}^n = \{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\}, \quad con \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$



Vamos a probar que $B(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{L}^o) = \sigma(\mathcal{L}^n)$

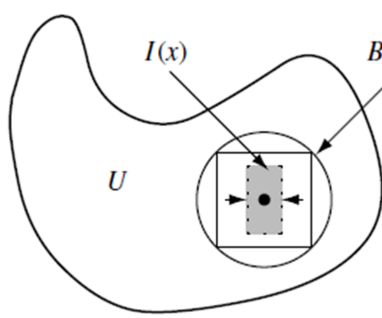
Demostración. Dado que $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ es un conjunto abierto, si $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

$$\sigma(\mathcal{L}^o) \subset \sigma(O^n) = B(\mathbb{R}^n)$$

Inversamente si $U \in O^n$ tenemos

$$U = \bigcup_{I \in \mathcal{L}^o \subset U} I$$

La contensión $\supset$ es clara por definición y en la otra dirección $\subset$ si $x \in U$ como U es abierto $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$ e inscribimos un cuadrado en $B_\epsilon(x) \subset U$ y luego lo reducimos a un rectángulo $I = I(x) \in \mathcal{L}^o$ conteniendo a x.



entonces $U \in O^n \subset \sigma(\mathcal{L}^o)$ y por lo tanto $\sigma(\mathcal{L}^o) = \sigma(O^n)$.
Ahora bien para todos los rectángulos semiabiertos escribimos

$$[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left(a_1 - \frac{1}{j}, b_1\right) \times \cdots \times \left(a_n - \frac{1}{j}, b_n\right)$$

mientras que para los rectángulo abiertos escribimos

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left[a_1 + \frac{1}{j}, b_1\right) \times \cdots \times \left[a_n + \frac{1}{j}, b_n\right)$$

estas fórmulas implican que $\mathcal{L}^o \subset \sigma(\mathcal{L}^n)$ y $\mathcal{L}^n \subset \sigma(\mathcal{L}^o)$ por lo que $\sigma(\mathcal{L}^o) = \sigma(\mathcal{L}^n)$ $\square$

Los conjuntos de Borel en la recta real son los generados por los conjuntos

$$\begin{array}{cc}
\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} & \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \\
\{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{Q}\} & \{(-\infty, b] \mid a \in \mathbb{R}\} \\
\{(c, +\infty) \mid c \in \mathbb{Q}\} & \{(c, +\infty) \mid c \in \mathbb{R}\} \\
\{[c, +\infty) \mid d \in \mathbb{Q}\} & \{[d, +\infty) \mid d \in \mathbb{R}\}
\end{array}$$