Funciones medibles

Definición 1. *Un espacio medible es una pareja (X, S), en la que X es un conjunto no vacío y S es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.*

Definición 2. *Sean (X, S) y (Y, S') dos espacios medibles. Una función $f : X \to Y$ se llama medible relativa a las $\sigma-$álgebras S y S' si $f^{-1}(S') \subset S$, es decir $f^{-1}(E') \in S$, $\forall\ E' \in S'$.*

Si $Y = \mathbb{R}$ y $S' = B(\mathbb{R})$, entonces diremos que f es s-medible si $f^{-1}(B(\mathbb{R})) \subset S$

Ejemplo Si $f : X \to Y$ es una función y $S \subset X$ una $\sigma-$álgebra, entonces

$$K = \{F \subset Y \mid f^{-1}(F) \in S\}$$

es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Y.

a) Tenemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in S$ por tanto $\emptyset \in K$

b) Si $\emptyset \in K$ entonces $f^{-1}(\emptyset) \in S$ por lo que $f^{-1}(\emptyset^c) = (f^{-1}(\emptyset))^c \in S$ por tanto $\emptyset^c \in K$ es decir $Y \in K$

c) Si $A \in K$ entonces $f^{-1}(A) \in S$ por tanto $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in S$ y en consecuencia $A^c \in K$

d) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$ entonces $f^{-1}(A_k^c) \in S$ para $k \in \mathbb{N}$ por lo que $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k^c \in S$ y en consecuencia $\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k^c\right)^c \in S$ por lo tanto $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in K$

Proposición 1. *Sean (X, S) y (Y, S') dos espacios medibles y $f : X \to Y$ una función. Supongamos que existe $E' \subset P(Y)$ tal que $\sigma(E') = S'$. Si $f^{-1}(E') \subset S$, entonces f es medible relativa a S y S'*

Demostración. Tenemos que

$$K = \{F \subset Y \mid f^{-1}(F) \in S\}$$

es una $\sigma-$álgebra que por hipótesis contiene a E'. Así $S' = \sigma(E') \subset K$ por lo tanto

$$f^{-1}(S') \subset f^{-1}(K) \subset S$$

□

Para el caso $Y = \mathbb{R}$ y $S' = B(\mathbb{R})$ tenemos

Corolario 1. *Sean (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) f es s-medible

b) $f^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ pertenecen a S para todo $c \in \mathbb{R}$

c) $f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ pertenecen a S para todo $c \in \mathbb{R}$

d) $f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in X \mid f(x) < c\}$ pertenecen a S para todo $c \in \mathbb{R}$

e) $f^{-1}([c,+\infty)) = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ pertenecen a S para todo $c \in \mathbb{R}$

Demostración. Tenemos que
$a \Rightarrow b$
f es s-medible entonces $f^{-1}(B(\mathbb{R})) \subset S$ y como $(c,+\infty) \in B(\mathbb{R})$ entonces $f^{-1}((c,+\infty)) \in S$
$b \Rightarrow c$
$f^{-1}((-\infty,c]) = (f^{-1}((c,+\infty)))^c \in S$
$c \Rightarrow d$
$f^{-1}((-\infty,c)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty, c-\frac{1}{n}\right]\right) \in S$
$d \Rightarrow e$
$f^{-1}([c,+\infty)) = \left(f^{-1}((-\infty,c))\right)^c \in S$
$e \Rightarrow a$
Sea $E' = \{[c,+\infty) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Se tiene entonces $\sigma(E') = B(\mathbb{R})$ pues

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[c+\frac{1}{n},+\infty\right) = (c,+\infty)$$

$\square$