Medidas sobre $\sigma-$álgebras

Definición 1. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida en $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades*

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(E) \geq 0, \ \forall \ E \in \mathcal{A}$

c) μ *es sigma aditiva, es decir, si* (E_n) *es una sucesión de elementos disjuntos entre si en* $\mathcal{A}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j)$$

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama espacio de medida.

Ejemplo Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $x \in X$ algún´punto, entonces la función $\delta_x : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ definida para $A \in \mathcal{A}$ por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin A \\ 1 & si \quad x \in A \end{cases}$$

es una medida, es la llamada medida Delta de Dirac

Demostración. Tenemos que

a) Como $\emptyset$ no contiene puntos $x \notin \emptyset$ entonces $\delta_x(\emptyset) = 0$

b) Si $x \in A$ entonces $\delta_x(A) = 1 \geq 0$. Si $x \notin A$ entonces $\delta_x(A) = 0 \geq 0$ en cualquier caso $\delta_x(A) \geq 0$

c) Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión disjunta por parejas, A_j conjuntos medibles
Si $x \in \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ entonces existe j_0 con $x \in A_{j_0}$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_x\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= 1 + 0 + ... \\ &= \delta_x(A_{j_0}) + \sum_{j\neq j_0} \delta_x(A_j) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_x(A_j)\end{aligned}$$

Si $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ entonces para todo $j \in \mathbb{N}$ $x \notin A_{j_0}$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_x\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= 0+0+...\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_x(A_j)\end{aligned}$$

□

Ejemplo Medida de probabilidad discreta

Sea $\Omega = \{\}\omega_1, \omega_2, ...$ un conjunto numerable y $P_j j \in \mathbb{N}$ una sucesión de numeros reales con $P_j \in [0,1]$ tal que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} P_j = 1$$

En $(\Omega, P(\Omega))$ la función

$$P(A) = \sum_{j:\omega_j\in A} P_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j\delta_{\omega_j}(A), \quad A\subset\Omega$$

define una medida de probabilidad

Demostración. Tenemos que

1. $P(\emptyset) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j\delta_{\omega_j}(\emptyset) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j(0) = 0$
2. $$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} P_j\delta_{\omega_j}(A_k)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} P_j\delta_{\omega_j}(A_k)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta_{\omega_j}(A_k)\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j\delta_{\omega_j}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\\ &= P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\end{aligned}$$

□