Definición 1. *El conjunto $\mathbb{R}^*$ es el conjunto*

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty \ +\infty\}$$

donde $+\infty$ y $-\infty$ son símbolos diferentes entre sí y son tales que

$$\{-\infty, +\infty\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$$

Adicionalmente a las operaciones con que cuenta $\mathbb{R}$, definimos en $\mathbb{R}^*$ las siguientes

a) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ se tiene $-\infty < x < +\infty$

b) Si xß$\mathbb{R}$ entonces

$$(+\infty) + x = +\infty = x + (+\infty)$$
$$(-\infty) + x = -\infty = x + (-\infty)$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

No estan definidas las relaciones

$$(+\infty) + (-\infty)$$
$$(-\infty) + (+\infty)$$

c) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces

$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y $x < 0$ entonces

$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty$$
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty$$

también

$$(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0$$
$$(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$$

d) además

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

El sistema de los reales extendidos es el conjunto $\mathbb{R}^*$ con las operaciones antes definidas.
Nota: si $A \subset \mathbb{R}^*$ es no vacío tal que $A \cap \mathbb{R}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$ entonces $\sup A = +\infty$. Análogamente, si $A \subset \mathbb{R}^*$ es no vacío tal que $A \cap \mathbb{R}$ no es acotado inferiormente en $\mathbb{R}$ entonces $\inf A = -\infty$.
Nota: SEa J el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$. Por convención, para cada $a \in \mathbb{R}$

$$(a,a) = \emptyset, \quad [a,a] = \{a\}$$

De esta manera, $\emptyset,\ \{a\} \in J$ para toda $a \in \mathbb{R}$. Ademàs, si $I \in J$ es un intervalo cuyos extremos son a y b entonces escribiremos $I(a,b)$ para denotar este hecho.
La $\sigma-$álgebra de Borel $\overline{B}(\overline{\mathbb{R}})$ esta definida por

$$B^* \in \overline{B} \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{c} B^* = B \cup S \ \textit{para algún} \ B \in B(\mathbb{R}) \\ S \in \{\emptyset,\ \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\} \end{array}$$

Lema 1. *$\overline{B}$ es generada por todos los conjuntos de la forma*

$$[a,+\infty],\ (b,+\infty],\ [-\infty, c),\ [-\infty, d]$$

donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Demostración. Sea

$$\Sigma = \sigma(\{[a,+\infty] \mid a \in \mathbb{R}\})$$

Ya que

$$[a,+\infty] = [a,+\infty) \cup \{+\infty\} \quad y \quad [a,+\infty) \in B(\mathbb{R})$$

tenemos que $[a,+\infty] \in \overline{B}$ y $\Sigma \subset \overline{B}$.
Por otro lado

$$[a,b) = [a,+\infty] \setminus [a,+\infty] \in \Sigma \ \ \forall \ -\infty < a \leq b < +\infty$$

Lo que significa que $B(\mathbb{R}) \subset \Sigma \subset \overline{B}$.
Ya que también

$$\{+\infty\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} [j,+\infty], \quad \{-\infty\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} [-\infty, -j] = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} [-j, \infty]^c$$

tenemos $\{-\infty\},\ \{+\infty\} \in \Sigma$ lo que implica que todos los conjuntos de la forma

$$B,\ B \cup \{+\infty\},\ B \cup \{-\infty\},\ B \cup \{-\infty, +\infty\} \in \Sigma \ \ \forall\ B \in B(\mathbb{R})$$

por lo tanto $\overline{B} \subset \Sigma$ □

Definición 2. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} \subset P(X)$ un álgebra. Una casi-medida es una función conjuntista $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(A) \geq 0$, *para toda* $A \in \mathcal{A}$

c) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si $\mu(X) < \infty$ entonces μ se llama finita. Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $\mu(A_i) < \infty$ $(A_i \in \mathcal{A})$ entonces μ se llama $\sigma-$finita.

Definición 3. *Una medida exterior es una función conjuntista $\rho : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

a) $\rho(\emptyset) = 0$

b) $\rho(E) \geq 0$, *para toda* $E \in X$

c) $\rho(E) \leq \rho(F)$ *si* $E \subset F \subset X$

d) Para toda $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de subconjuntos de X, se cumple

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$$

Ejemplo Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida. Definimos $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$\mu^* = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}\ (n \in \mathbb{N})\right\}$$

Una sucesión A_n de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $E \subset \bigcup_n A_n$ se llama una $\mathcal{A}-$cubierta de E y μ^* se llama la medida exterior generada por μ

Teorema 1. $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *es una medida exterior*

Demostración. Tenemos que

a) $\emptyset, \emptyset, ...$ es una $\mathcal{A}-$ cubierta de $\emptyset$, entonces $\mu^*(\emptyset) \leq 0$ por lo tanto

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

b) Sean $E \subset F \subset X$ dados. Como toda $\mathcal{A}-$cubierta de F es también una $\mathcal{A}-$cubierta de E, se sigue de la definición

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

c) Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, si $\mu^*(E_n) = +\infty$ para algún n, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad (= +\infty)$$

por lo que supondremos $\mu^*(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea $\epsilon > 0$ arbitraria, para cada n hallamos una $\mathcal{A}-$cubierta numerable $(A_i^{(n)})$ de E_n tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Como $\left\{A_i^{(n)} \mid (i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}$ es una $\mathcal{A}-$cubierta de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ se tiene que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{(i,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(A_i^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n) + \epsilon$$

por lo tanto μ^* es $\sigma-$aditiva y constituye una medida exterior.

$\square$