Sea

$$\mathcal{A}=\left\{\bigcup_{n=1}^{k}(a_n,b_n],\ \bigcup_{n=1}^{k}(-\infty,b_n],\ \bigcup_{n=1}^{k}(a_n,+\infty),\quad a_n,b_n\in\mathbb{R},\ (a_n,b_n)\neq(a_j,b_j),\ n\neq j\right\}$$

denotamos $I_n=(a_n,b_n)$, $I_n=(a_n,b_n]$, $I_n=(-\infty,b_n]$, $I_n=(a_n,+\infty)$, $\lambda(I_n)=b_n-a_n$, $-\infty<a_n\leq b_n<+\infty$ y entonces $\sigma(\mathcal{A})=B(\mathbb{R})$ y definimos $\lambda:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}$ como sigue

Definición 1.

$$\lambda(A)=\begin{cases}+\infty & si\ A=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\ con\ algún\ intervalo\ I_j\ que\ no\ sea\ acotado\\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda(I_j)\ en\ otro\ caso\end{cases}$$

Notamos que el valor de $\lambda(A)$ no depende de las posibles descripciones de A.
Lo verificamos sólo si $\lambda(A)<+\infty$.
Supongamos que

$$A=\bigcup_{j=1}^{n}I_j\quad y\quad A=\bigcup_{k=1}^{m}J_k$$

con $I_j,\ J_k\in\ \mathcal{A}$ acotados, entonces

$$I_j=\bigcup_{k=1}^{m}I_j\cap J_k\quad y\quad J_k=\bigcup_{j=1}^{n}I_j\cap J_k$$

Así pues

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda(I_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda(I_j\cap I_k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda(I_j\cap I_k)=\sum_{k=1}^{m}\lambda(J_k)$$

Teorema 1. *La función $\lambda:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}$ es una casi medida $\sigma-$finita*

Demostración. a) Tenemos que $\lambda(\emptyset)=\lambda((a,a))=a-a=0$

b) $\lambda(I_n)\geq 0\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{k}\lambda(I_n)\geq 0\ \Rightarrow\ \lambda(A)\geq 0$

c) Si (A_n) es una sucesión disjunta de elementos de A tal que $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ entonces

$$\lambda(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(I_n)$$

Caso 1 $A=(a,b]$ para algunos $a<b\in' mathbbR$.
Como cada A_n es la unión finita y disjunta de intervalos acotados se puede suponer que

$$(a,b]=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_jb_j]\quad (disjunta)$$

y hay que probar que

$$b - a = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$$

Sea $(a_{j_1}, b_{j_1}], ..., (a_{j_n}, b_{j_n}]$ una subcolección finita arbitraria; reenumerando si es necesario, podemos suponer que

$$a \leq a_{j_1} < b_{j_1} \leq a_{j_2} < \cdots < b_{j_{n-1}} \leq a_{j_n} < b_{j_n} \leq b$$

entonces

$$b - a \geq \sum_{i=1}^{n}(b_{j_i} - a_{j_i}) \ \ \textit{por lo tanto } b - a \geq \sum_{i=1}^{\infty}(b_j - a_j)$$

Inversamente, sea $\epsilon \in (0, b-a)$ y sea $\epsilon_j = \dfrac{\epsilon}{2^j}$ $(j \in \mathbb{N})$, reenumerando si es necesario, supondremos que $a_1 < a + \epsilon$.
Sean $I_j = (a_j, b_j + \epsilon)$ si $j \geq 1$, entonces $\} = \{I_j\}_{j\in\mathbb{R}}$ es una cubierta abierta del compacto $[a+\epsilon, b]$, por lo que existen $I_{j_1}, I_{j_2}, ..., I_{j_m} \in \}$ tales que

$$[a+\epsilon, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{j_i}$$

eliminando intervalos innecesarios y reenumarando se puede suponer que forman una cadena simple es decir

$$\begin{gathered} a_{j_1} < a + \epsilon < a_{j_2} < b_{j_1} + \epsilon_{j_1} < a_{j_3} < b_{j_2} + \epsilon_{j_2} \\ < \cdots < a_{j_m} < b_{j_{m-1}} + \epsilon_{j_{m-1}} \leq b < b_{j_m} + \epsilon_{j_{m-1}} \end{gathered}$$

así que

$$b - a - \epsilon < (b_{j_m} + \epsilon_{j_m}) - a_{j_1} = (b_{j_m} + \epsilon_{j_m} - a_{j_1}) + \sum_{\ell=2}^{m}(b_{j_\ell} + \epsilon_{j_\ell} - b_{j_{\ell-1}} + \epsilon_{j_{\ell-1}}) < \sum_{k=1}^{m}(b_{j_k} + \epsilon_{j_k} - a_{j_k})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) + \epsilon$$

com ϵ es arbitraria obtenemos

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$$

Caso 2 $A = (a, +\infty)$.
Si algún A_n contiene un intervalo no acotado, entonces

$$\lambda(A) = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)$$

Así que supondremos como en el caso 1, que cada A_n es un intervalo acotado $(a, b] = (a, b] \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$.

Los intervalos $(a_n, b_n]$ son disjuntos dos a dos por el caso 1.

$$b - a = \sum_{n \ | \ a_n < b} b_n - a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$$

haciendo b tender a infinito obtenemos que

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$$

El caso $A = (-\infty, b]$ es análogo.

$\square$

Definición 2. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. La medida exterior de Lebesgue se define*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

donde $I_n = (a_n, b_n)$, $-\infty < a_n \leq b_n < b_n$, $\lambda(I_n) = b_n - a_n$

Teorema 2. *La media exterior de Lebesgue tiene las siguientes propiedades*

a) $\mu^*(A) \geq 0$

b) $\mu^*(\emptyset) = 0$

c) Si A, B son conjuntos tales que $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

d) $\mu^*(A) = 0$ *para todo* $A = \{x\}$

e) $\mu^*(A + x) = \mu^*(A)$ *para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$*

Demostración. a) Dado que $\lambda(I_n) \geq 0$ se tiene que $\mu^*(A) \geq 0$

b) Eligiendo $b_n = a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta que $\mu^*(\emptyset) \leq 0$ y en consecuencia $\mu^*(\emptyset) = 0$

c) Supongamos que existe una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos abiertos tal que $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ se tiene entonces $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ por lo que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n)$$

y por lo tanto

$$\mu^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) \mid B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = \mu^*(B)$$

d) Si $A = \{x\}$ entonces para cada $\epsilon > 0$ se tiene $A \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$ y por tanto

$$\mu^*(A) < 2\epsilon \;\Rightarrow\; \mu^*(A) = 0$$

e) Supongamos que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ donde $\{I_n\}$ es una sucesión de intervalos abiertos. Entonces

$$A + x \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (I_n + x)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\mu^*(A+x) &= \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n + x) \mid A + x \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n + x\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) \mid A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right\}\\ &= \mu^*(A)\end{aligned}$$

□

Teorema 3. *Para toda colección numerable $\{E_n\}$ en $\mathbb{R}$ se cumple*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$$

Demostración. Si $\mu^*(E_n) = +\infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) = +\infty$ y la desigualdad se cumple.
Supongamos que $\mu^*(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una colección $\{I_{nj} \mid j \in \mathbb{N}\}$ de intervalos abiertos tal que

$$E_n \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{nj} \quad y \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(I_{nj}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Dado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nj}$$

Tenemos que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(I_{nj}) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* E_n + \frac{\epsilon}{2^n}$$

como ϵ es arbitrario

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$$

□