Definición 1. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. La medida exterior de Lebesgue se define*

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

donde $I_n = (a_n, b_n)$, $-\infty < a_n \leq b_n < b_n$, $\lambda(I_n) = b_n - a_n$

Ejemplo La medida exterior de un intervalo es su logitud

Demostración. a) Sea I un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, $I = (a, b)$

b) Dado $\forall\ \epsilon > 0$ se tiene

$$I = (a, b) \subset \left(a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Se tiene entonces que

$$\mu^*(I) = b - a + \epsilon \ \ es \ \ decir \ \ \mu^* \leq b - a$$

c) Ahora supongamos que I es un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos tal que $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ como I es compacto por Heine-Borel

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$$

donde $a \in I_1 = (a_1, b_1)$ $a_1 < a < b_1$ y $b \in I_n = (a_n, b_n)$ $a_n < b < b_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) &\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (b_n - a_n) \\
&= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \cdots + b_n - a_n \\
&= b_n + (b_{n-1} - a_n) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1 \\
&> b_n - a_1 \\
&> b - a
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu^*(I) \geq b - a$ con $a < b$

□

Si $I = (a, b)$, $[a, b)$, $[a, b]$ entonces $I \subset [a, b]$, por la monotonía

$$\mu^*(I) \leq b - a$$

Por otra parte tomamos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \dfrac{b - a}{2}$ se satisface $[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset I$

$$b - a - 2\epsilon \leq \mu^*(I)$$

por lo tanto

$$b - a \leq \mu^*(I)$$

Ejemplo Todo conjunto numerable en $\mathbb{R}$ tiene medida exterior cero, de hecho si $E = \{a_1, a_2, ...\}$ es un conjunto numerable entonces

$$E = \bigcup \{a_n\} \quad \mu^*(E) = \mu^* \left(\bigcup \{a_n\} \right) \leq \sum_n \lambda(\{a_n\}) = 0$$

por lo tanto $\mu^*(E) = 0$

Ejemplo El intervalo $[0, 1]$ es no numerable. Suponiendo que $[0, 1]$ es numerable se tendría $\mu^*([0, 1]) = 0$ pero $\mu^*([0, 1]) = 1$

Medida de Lebesgue

Definición 2. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se dice que es Lebesgue medible si para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, se cumple*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Si un conjunto es Lebesgue medible, entonces la medida de Lebesgue del conjunto es su medida exterior. Dado que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

se satisface por la propiedad de subaditividad, sólo se debe verificar la otra desigualdad.
El conjunto E divide en dos partes disjuntas $A \cap E$, $A \cap E^c$. E es Lebesgue medible si divide cada conjunto A de tal manera que la medida externa del conjunto sea la suma exterior de Lebesgue de las partes