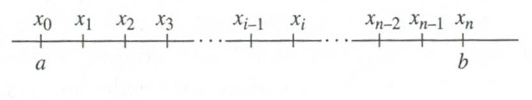
Introducción

Definición 1. *Una partición del intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *es un subconjunto* $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\} \subset [a,b]$ *tal que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *y la denotamos* $P_{[a,b]}$

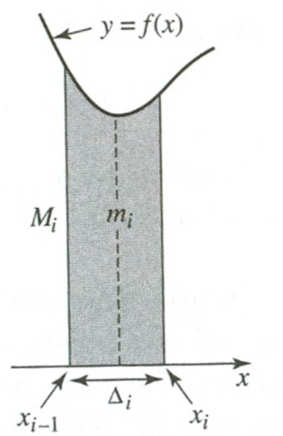


Definición 2.

$$m_i = \text{ínf}\, f[x_{i-1}, x_i] = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup f[x_{i-1}, x_i] = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

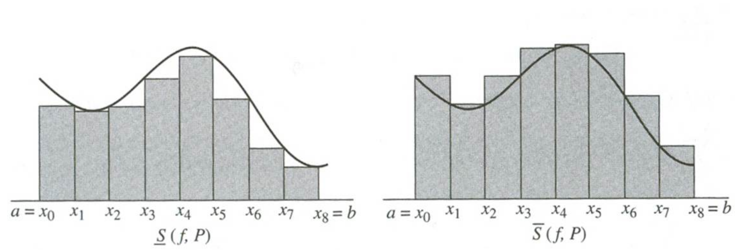
$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}$$



Definición 3. *Para cada partición* $P_{[a,b]}$ *se tiene que*

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \quad \textit{Sumas} \quad \textit{Inferiores} \quad \textit{para} \quad f \quad \textit{sobre} \quad P$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \quad \textit{Sumas} \quad \textit{Superiores} \quad \textit{para} \quad f \quad \textit{sobre} \quad P$$



Definición 4. *Definimos la integral inferior de f sobre* $[a, b]$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup A = \sup\{\underline{S}(f, P) \mid P \text{ es particion de } [a, b]\}$$

Definición 5. *Definimos la integral superior de f sobre* $[a, b]$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf B = \inf\{\overline{S}(f, P) \mid P \text{ es particion de } [a, b]\}$$

Definición 6. *Una función f definida y acotada sobre* $[a, b]$ *se dice que es integrable si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

y en este caso el valor comun es llamado la integral de f sobre $[a, b]$ *y se denota*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si f es continua, es integrable Riemann al tomar los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ cada vez más pequeños, las diferencias $M_i - m_i$ se hace también cada vez más pequeñas y

$$\lim_{\Delta_i \to 0} [\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)] = 0$$

Análogamente sucede si la función f deja de ser continua en algunos puntos. Es decir, si f es poco discontinua.
Pero si f es muy discontinua entonces el hecho de tomar intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ cada vez más pequeños no nos garantiza que las diferencias $M_i - m_i$ se hagan cada vez más pequeñas, pues en virtud de la discontinuidad de f, a valores próximos de x no tienen por qué corresponder valores de $f(x)$ próximos entre sí.
En consecuencia f no tiene por qué ser integrable.

Ejemplo La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b] \end{cases}$$

no es Riemann integrable, pues

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}M_i[x_i-x_{i-1}]=1$$

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}m_i[x_i-x_{i-1}]=0$$

por tanto

$$\inf\{\overline{S}(f,P)\}\neq\sup\{\underline{S}(f,P)\}$$

Es decir

$$f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$$

no es Riemann integrable para cualquier partición P del intervalo $[a,b]$.
Esto es consecuencia de la discontinuidad de la función.

Ejemplo Sea

$$\{r_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

una enumeración de $\mathbb{Q}\cap[a,b]$. Definimos, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$g_n=\chi_{\{}r_1,r_2,\ldots,r_n\}:[a,b]\to\mathbb{R}$$

Resulta que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones Riemann-Integrables tal que

$$g_n\to f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}\quad en\quad [a,b]$$

de esta manera se tiene que la sucesión de funciones Riemann-Integrables no necesariamente converge a una función Riemann-Integrable.
La cuestión fundamental estriba entonces en determinar si f es Riemann-Integrable y, cuando así suceda, establecer si

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$$

Para salvar estas dificultades y poder ampliar la noción de integral para funciones muy discontinuas, la construcción de Lebesgue propone una definición de integral cuya idea básica consiste en tomar conjuntos de valores $f(x)$ próximos entre sí.