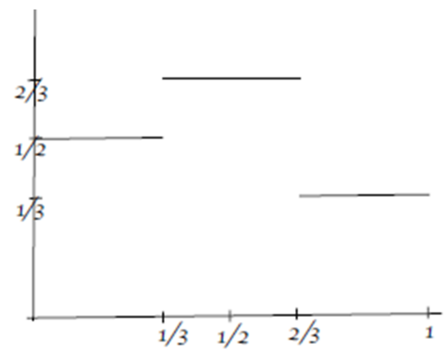
La idea de Lebesgue

Definición 1. ***Función escalonada.***
Una función escalonada es aquella función definida a trozos que en cualquier intervalo finito $[a,b]$ en que esté definida tiene un número finito de discontinuidades $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ y en cada intervalo abierto (x_i, x_{i+1}) es constante, teniendo discontinuidades de salto en los puntos x_i.

Ejemplo La función g de la figura



se puede representar de la siguiente manera:

$$g(x) = \frac{1}{2}\ \chi_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}\ \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}\ \chi_{[\frac{2}{3},1]}(x)$$

donde $\chi_{[\alpha,\beta)}$ es la función característica del intervalo $[\alpha,\beta)$ definida de la siguiente manera:

$$\chi_{[\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\alpha,\beta) \\ 0 & si \quad x \notin [\alpha,\beta) \end{cases}$$

Notamos que si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada tal que $g(x) = c_i$ para cada $x \in (x_{i-1}, x_i)$ con $i = 1, ..., n$ donde $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces los valores de g en cada punto de P son despreciables en relación de Riemann. Luego g puede ser escrita en la forma

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$$

donde $I_i = [x_{i-1}, x_1]$ para $i = 1, ..., n-1$ y $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Note que

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad con \quad I_i \cap I_j = \emptyset \ \ si \ i \neq j$$

Así que un primer intento de generalizar a las funciones escalonadas en $[a,b]$ es considerar las funciones $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ del tipo

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$$

donde

$$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,,\quad con\quad A_i\cap A_j=\emptyset\;\; si\ i\neq j$$

Las funciones de tipo S se llaman simples. Observamos que de manera natural podríamos definir

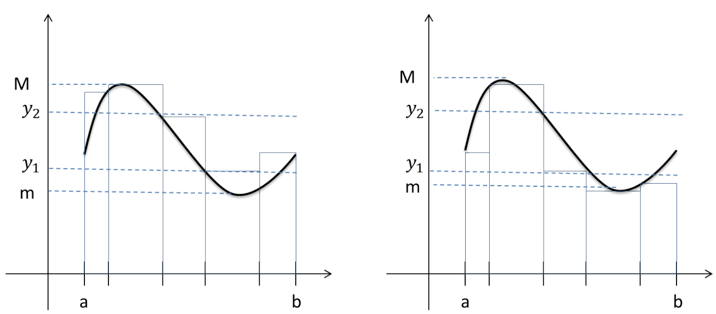
$$\int S\ d\lambda=\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda(A_i)$$

donde λ es la medida del conjunto A_i.
Observese que incluso si el dominio de S es todo $\mathbb{R}$, sigue siendo natural definir

$$\int S\ d\lambda=\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda(A_i)$$

También es claro que el valor de nuestra nueva integral depende fuertemente de poder definir a los valores de $\lambda(A_i)$.
En resumen para lograr tener una adecuada extensión de la integral es necesario extender a un conjunto adecuado a la función longitud.
La construcción de Lebesgue propone una definición de integral cuya idea básica consiste en tomar conjuntos de valores $f(x)$ próximos entre sí.
Se considera el intervalo $[m,M]$ determinado por

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}\quad y\quad m=\text{ínf}\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$$

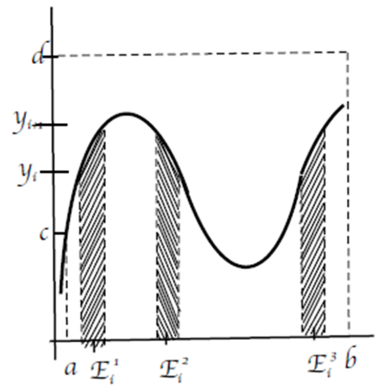


Ahora bien si consideramos una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Para cada partición

$$\{m=y_0,y_1,...,y_n=M\}$$

del intervalo $[m,M]$ se toman los conjuntos

$$E_i=\{x\in[a,b]\mid y_{i-1}\leq f(x)<y_i\}$$



La imagen inversa de un intervalo $[y_i, y_{i+1}]$, puede ser muy complicada. En la figura, la imagen inversa es una unión de intervalos

$$f^{-1}[y_i, y_{i+1}] = E_i^1 \cup E_i^2 \cup E_i^3$$

No obstante el área sombreada en la figura se puede aproximar por

$$c_i \ell(E_i^1) + c_i \ell(E_i^2) + c_i \ell(E_i^3) = c_i \sum_k \ell(E_i^k), \quad con \ \ c_i \in [y_i, y_{i+1}]$$

Ejemplo Veamos qué sucede con la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b] \end{cases}$$

discontinua en todo $[a, b]$.
Al ser $f([a, b]) = \{0, 1\}$, las aproximación de Lebesgue para cualquier partición de $\{0, 1\}$ sería

$$1 \cdot m([a, b] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m([a, b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}))$$

y por consiguiente la función f es integrable siendo

$$\int_a^b f = 1 \cdot m([a, b] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m([a, b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}))$$

simpre que las medidas de $m([a, b] \cap \mathbb{Q})$ y $m([a, b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}))$ estén definidas.
O sea, la construcción de Lebesgue nos ha permitido integrar una función discontinua en todo punto en todo punto y que no era por tanto integrable Riemann.

La integral de Riemann se define mediante particiones del dominio de la función y calculando el valor de la función en los puntos de cada intervalo de la partición. Sin embargo, para definir la integral de Lebesgue se realiza una partición de la imagen de la función y se mide el tamaño del dominio para los cuales la imagen de la función está comprendida entre dichos valores. Para medir los conjuntos

$$\{x \in D(f) \mid y_{i-1} \leq f(x) \leq y_j\}$$

es necesario desarrollar la teoría de la medida.