Algunos resultados sobre derivadas de funciones vectoriales

Definición: Si $r(t)$ es un vector de posición de una particula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces:

a) la velocidad es la derivada de la posición $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$

b) la rapidez es la magnitud de la velocidad $\|v(t)\|$

c) la aceleración es la derivada de la velocidad $a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt}$

d) el vector $\dfrac{v(t)}{\|v(t)\|}$ es una dirección de movimiento en el tiempo t.

Ejemplo: El vector $r(t) = 3\cos t\hat{i}+3\sin t\hat{j}+t^2\hat{k}$ da la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo t. Encuentre la rapidez del cuerpo y su direccion cuando $t = 2$ ¿En que tiempo son ortogonales los vectores velocidad y aceleración del cuerpo?

Solución: Tenemos que $\dfrac{dr(t)}{dt} = -3\sin t\hat{i} + 3\cos t\hat{j} + 2t\hat{k}$

$$\begin{aligned} \|r'(t)\| &= \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{-\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2} \\ &\sqrt{9 + 4t^2} \end{aligned}$$

por lo tanto si $t = 2$ entonces $\sqrt{9 + 4(2)^2} = \sqrt{25} = 5$

por lo tanto la dirección es $\dfrac{1}{5}(-3\sin 2, 3\cos 2, u)$

por otro lado,

$$\begin{aligned} r \cdot a = 0 &\Leftrightarrow (-3\sin t, 3\cos t, 2t) \cdot (-3\cos t, -3\sin t, 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 0 \\ &\Leftrightarrow 4t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio: Encontrar la función de una particula a partir de su función velocidad y posición inicial. La velocidad de una particula que se mueve en el espacio es $\dfrac{dr(t)}{dt} = \cos t\hat{i} - \sin t\hat{j} + \hat{k}$ Encuentre la psición de la particula e función de t si $r(0) = 2\hat{i} + \hat{k}$

Solución: Nuestra meta es resolver el problema de valor inicial que consiste en la ecuación diferencial

$$\frac{dr(t)}{dt} = \cos t\hat{i} - \sin t\hat{j} + \hat{k} \text{con} r(0) = 2\hat{i} + \hat{k}$$

al integrar de ambos lados $r(t) = \sin t\hat{i} - \cos t\hat{j} + t\hat{k} + c$ y el valor de c lo encontramos a partir de la condición inicial

$$\sin(0)\hat{i} - \cos(0)\hat{j} + (0)\hat{k} + c = 2\hat{i} + \hat{k}$$

por lo tanto

$$c + \hat{j} = 2\hat{i} + \hat{k}$$

$$c = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

por lo tanto

$$r(t) = (\sin t + 2)\hat{i} + (\cos t - 1)\hat{j} + (t + 1)\hat{k}$$

Ejercicio: Hallar el ángulo formado por las graficas de las funciones definidad por $f(t) = (t, t^2 + 1, 1 - 2t)$, $g(w) = (w + 1/2, -2 + 8w, -2)$ en algunos de los puntos de intersección.

Solución: El ángulo formado por dos curvas e un punto de intersección es el formado por sus tangentes en el mismo punto.

Primero igualaremos las funciones componente a componente

$$\underbrace{t = w + \frac{1}{2}}_{1} \quad \underbrace{t^2 + 1 = -2 + 8w}_{2} \quad \underbrace{1 - 2t = -2w}_{3}$$

Sustituyendo 1) en 2)

$$(w + \frac{1}{2})^2 = -2 + 8w$$

$$w^2 - 7w + \frac{13}{4} = 0$$

$$w_1 = \frac{13}{2}, \qquad w_2 = \frac{1}{2}$$

y sustituyendo en 1) $t = 7$ ó $t = 1$ así los puntos de interseccion son: $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(7, 50, -13)$ tomando a P_1 tenemos que $f'(t) = (1, 2t, -2)$ y $g'(w) = (1, 8, -2)$ por lo tanto

$$f'(1) = (1, 2, -2)\text{y}g'(t) = (1, 8, -2)$$

por lo tanto el angulo entre f' y g' es $f'(1) \cdot g'(1/2) = |f'(1)||g'(1/2)| \cos\theta$

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left[\frac{f'(1) \cdot g'(1/2)}{|f'(1)||g'(1/2)|}\right] \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{21}{3\sqrt{69}}\right) \\ &= \cos^{-1}(0{,}8427) \\ &\approx 32^{o}6'\end{aligned}$$

Ejercicio: Mostramos que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal a el.

Solución: Sea $r(t)$ un vector de magnitud constante

$$r(t) \cdot r(t) = |r(t)|^2 = \text{constante}$$

por lo tanto

$$\frac{dr(t) \cdot r(t)}{dt} = r(t) \cdot r'(t) + r'(t) \cdot r(t) = 2r(t) \cdot r'(t) \cdots (1)$$

por otro lado

$$\frac{dr(t) \cdot r(t)}{dt} = \frac{(r(t))^2}{dt} = 0 \cdots (2)$$

de (1) y (2) tenemos

$$2r(t) \cdot r'(t) = 0$$

$$r(t) \cdot r'(t) = 0$$

por lo tanto el vector es ortogonal a su derivada

Ejercicio: Dado un vector B no nulo y una función vectorial F tal que $F(t) \cdot B = t$ $\forall t$ y tales que el ángulo formado por $F'(t)$ y B es constante (independientemente de t). Demostrar que $F''(t)$ es ortogonal a $F'(t)$

Solución: Tenemos que $(F \cdot B)' = F' \cdot B + B' \cdot F$ por otro lado $F \cdot B = t \Rightarrow (F \cdot B)' = 1$ mientras que

$$F \cdot B = \|F'\| \quad \|B\| \cos(F', B)$$

por lo tanto

$$1 = \|F'\| \quad \|B\| \cos(F', B) \Rightarrow \|F'\| = \frac{1}{|B\| \cos(F', B)}$$

que es constante $\forall t$ por lo que tenemos $\|F'\| = K \Rightarrow \|F'\|^2 = K^2$ y como

$$\|F'\|^2 = F' \cdot F'$$

entonces

$$\frac{d}{dx} F' \cdot F' = F' \cdot F'' + F'' + F' = 2F'' \cdot F' \Rightarrow 2F'' \cdot F' = 0 \Rightarrow F'' \perp F'$$

por lo tanto el vector F' es ortogonal a F" derivada

Teorema: Si f es una función vectorial continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces existe $C_i \,\epsilon\, (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)(f_1'(C_1), \ldots, f_n'(C_n))$.

Demostración: Por hipotesis f_i es continua y diferenciable, por lo tanto para ca da f_i existe $C_i \,\epsilon\, (a, b)$ tal que $f_i'(C_i) = \dfrac{f_i(b) - f_i(a)}{b - a}$.
por lo tanto

$$f_i'(C_i)(b - a) = f_i(b) - f_i(a)$$

por lo tanto

$$f(b) - f(a) = (b - a)(f_1'(C_1), \ldots, f_n'(C_n))$$

Teorema: Si f es continua sobre $[a, b]$ y es diferenciable sobre (a, b) existe $C_i \,\epsilon\, (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)(f_1'(C_1), \ldots, f_n'(C_n))$.

Demostración: La hipotesis sobre f implica que cada componente f_n es diferenciable y continua

por lo tanto, para cada f_i existe $C_i \,\epsilon\, (a, b)$ tal que

$$f_i'(C_i) = \frac{f_i(b) - f_i(a)}{b - a}$$

por lo tanto

$$f_i'(C_i)(b - a) = f_i(b) - f_i(a)$$

por lo tanto

$$f(b) - f(a) = (b - a)(f_1'(C_1), \ldots, f_n'(C_n))$$

Definición: Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es una funcion vectorial definida sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\right)$. La integral existe siempre que cada una de las integrales $\int_a^b f_1$ con $i = 1, \ldots, n$ existe. En partic ular, si f es continua sobre $[a, b]$ entonces $\int_a^b$ existe.

Teorema: Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es continua sobre un intervalo I y $a \,\epsilon\, I$ entonces:

$$\frac{d \int_a^t f}{dt} = f(t) \quad \forall \quad t \,\epsilon\, I$$

Demostración: La prueba se obtiene por la aplicación del primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes

$$\begin{aligned} \frac{d \int_a^t f}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f_1, \ldots, \int_a^t f_n\right) \\ &\left(\frac{d}{dt}\int_a^t f_1, \ldots, \frac{d}{dt}\int_a^t f_n\right) \\ &= (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Teorema: Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ tiene derivada continua sobre un intervalo I, entonces $\forall \quad a, b \,\epsilon\, I$ $\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a)$

Demostración:

$$\begin{aligned}\int_a^b f' &= \int_a^b (f_1', \ldots, f_n') \\ &= \left(\int_a^t f_1', \ldots, \int_a^t f_n'\right) \\ &= (f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a)) \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

Teorema: Si $f(t)$ es una función vectorial continua sobre un intervalo I y si $t_0 \in I$ y x_0 es un vector cualquiera, entonces hay una solución sobre f de la ecuación diferencial $x' = f$ que satisface $x(t_0) = x_0$. La solución es: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f dt$

Demostración: supongamos primero que $x' = f$ y $x(t_0) = x_0$. Entonces de acuerdo con el segundo teorema fundamental del calculo

$$\int_{t_0}^t f dt = \int_{t_0}^t x' dt = x(t) - x(t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f dt$$

Reciprocamente: Si $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f dt$ entonces $x(t_0) = x_0$ y según el primer teorema fundamental del calculo $x' = f$ sobre I

Ejemplo: Encontrar la función de posición de una particula a partir de su función velocidad y posición inical. La velocidad de una partícula que se mueve en el espacio es

$$\frac{df}{dt} = \cos(t)i - \operatorname{sen}(t)j + k$$

Encuentra la posición de la partícula en función de t si

$$f = 2i + k \quad cuando \quad t = 0$$

Solución: tenemos la siguiente ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{df}{dt} = \cos(t)i - \operatorname{sen}(t)j + k \quad f(0) = 2i + k$$

Integrando ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{df}{dt} = \int \cos(t)i - \operatorname{sen}(t)j + k \Rightarrow f(t) = \int \cos(t)dti - \int \operatorname{sen}(t)dtj + \int kdt$$

Por lo tanto

$$f(t) = \text{sen}(t)i + \cos(t)j + tk + C$$

evaluamos $f(0) = 0i + 1j + 0k + C$ y usamos la condición inicial para igular

$$2i + j = 0i + 1j + 0k + C \Rightarrow C = 2i - j + k$$

por lo tanto la funcion f es

$$f(t) = (\text{sen}(t) + 2)i + (\cos(t) - 1)j + (t + 1)k$$