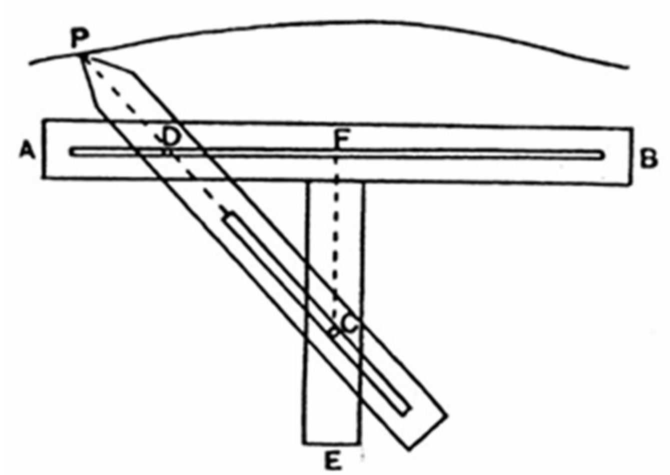
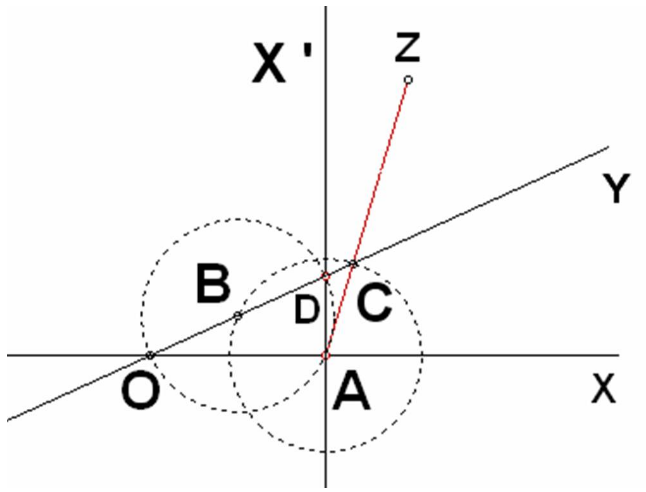
Antecedentes

Los Griegos fueron los primeros en utilizar la regla y el compás como instrumentos de trazo en las construcciones geométricas, aunque fueron rápidamente detenidos por problemas de construcción como son la trisección del ángulo (dado un ángulo dividirlo en tres partes iguales) y la duplicación del cubo (construir un cubo de dos veces el volumen de un cubo dado). Ellos no eran capaces de resolver estos problemas con estos aparatos. Para abordar estos problemas, los giegos construyeron nuevos instrumentos. Algunos pensaron que Platón había inventado algunos de ellos; sin embargo Platón culpa a algunos de sus discípulos (Menecmo, Eudoxo,...) por usar estos instrumentos alterando la pureza de la geometría; esta postura es mas coherente con la teoría de Platón. Uno de los que trabajó en la duplicación del cubo y la trisección del ángulo fué Nicomedes utilizando una especie de regla de su propia invención (ver figura).



Triplicar un ángulo con regla y compas es posible, veamos, sea $\widehat{XOY}$ un ángulo ahora tomemos un punto B arbritario sobre OY y tracemos una circunferencia de centro B y que pase por O, a la intersección de esta circunferencia con OX llamemosla A. A su vez, tomamos A de centro y con radio AB trazamos un círculo que intersecta a OY en C, la semirecta AZ es tal que su ángulo es $3\widehat{XOY}$(ver figura)

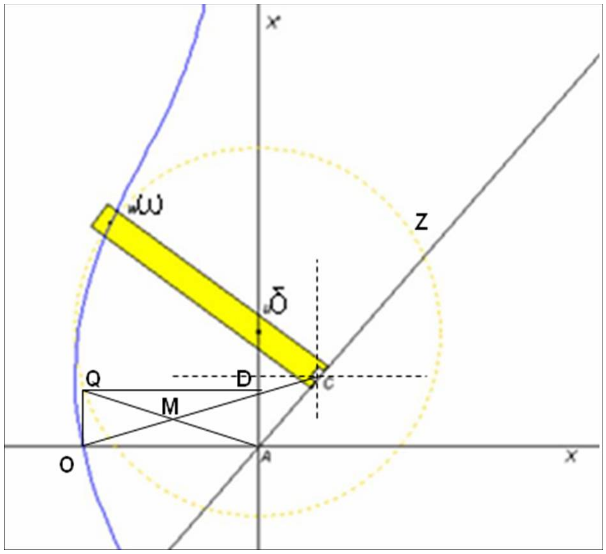


Inversamente si el ángulo $\widehat{XAZ}$ esta dado debe tomarse arbitrariamente C sobre AZ y se determina CO, donde el punto O esta sobre la prolongación de AX. Sea D el punto de intersección distinto de O de la recta OY con el primer círculo trazado; D esta sobre la perpendicular AX' a AX y la recta OY que pasa por C esta determinada por la igualdad DO=2CA; la longitud DO es por tanto conocida.

El problema: *dados un ángulo recto XAX', una longitud d y un punto C, construir una recta que pase por C tal que $|OD| = d$ donde D y O son las intersecciones con AX' y con AX respectivamente.*

A veces se le da el nombre del problema de Pappus. Viete lo menciona como fundamental para la subdivisión de ángulos.

Nicomedes empleó una regla con 2 puntos de referencia ω y δ a una distancia $OD = d$ dicha regla tenía una ranura, el eje de la regla es la recta que une ω con δ (ver figura).En la ranura se desplazará libremente un punto fijo C del plano. Cuando se mueve la regla, de modo que el punto δ este sobre AX', el punto ω describe una curva cuya intersección con el eje AX es el punto O buscado.



Para demostrar lo anterior tenemos que:

Sea OD tal que $OD = d = 2CA$ tenemos que dado el ángulo $\widehat{XAC}$, MA=AC ya que el triángulo $\triangle AMC$ es isoceles por ser $OD = 2CA$ por lo tanto $\widehat{CMA} = \widehat{ACM}$ se tiene tambien que $\widehat{XAC} + \widehat{MAC} + \widehat{OAM} = \widehat{MAC} + 2\widehat{AMC}$. Por tanto $\widehat{XAC} + \widehat{OAM} = 2\widehat{AMC}$ si $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$ entonces $2\widehat{AMC} = 4\widehat{OAM}$ por lo tanto de $2\widehat{AMC} = \widehat{XAC} + \widehat{OAM}$ se tiene que $4\widehat{OAM} = \widehat{XAC} + \widehat{OAM}$ por tanto $3\widehat{OAM} = \widehat{XAC}$. Al ser isoceles el triángulo $\triangle OAM$ entonces $\widehat{OAM} = \widehat{AOM}$ y por lo tanto $3\widehat{AOM} = \widehat{XAC}$

Por lo tanto basta comprobar que $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$.

Se tiene que $\widehat{OMA} + \widehat{AMC} = 2\widehat{OAM} + \widehat{OMA}$ por lo tanto $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$

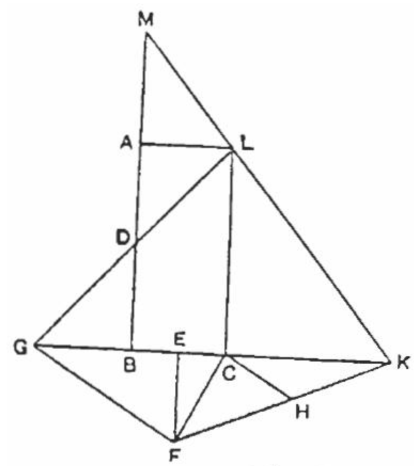
Los Griegos observaron que la duplicación del cubo era equivalente a encontrar la intersección de la hipérbola $xy = 2l^2$ con la parábola $x^2 = ly$ ya que la solución a estas ecuaciones está dada por $x^3 = 2l^3$ Por otra parte este punto de intersección está ligado al problema de construir las medias proporcionales de dos números dados a y b. Recordemos que las medias proporcionales de los números a y b son dos números x,y, tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

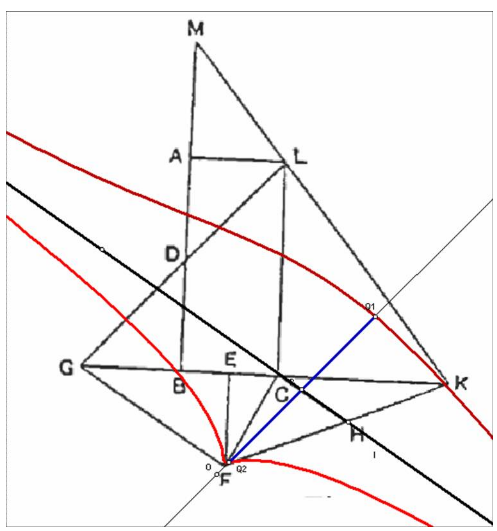
De aquí se obtienen las igualdades $xy = ab$, $x^2 = ay$, las cuales se convierten en las igualdades $x^2 = ly$ y $x^3 = 2l^3$

Mostraremos ahora como estas dos ramas de la concoide de Nicomedes pueden resolver el problema de la duplicación del cubo.

Sean AB y BC dos segmentos perpendiculares dados (ver figura), completamos el paralelogramo ABCL.



Sean D y E los puntos medios de ABy BC respectivamente. Trazamos una recta que pasa por L y D cortando a la prolongación de BC en G. Dibujamos la perpendicular a BC por E, y sobre ella se elige el punto F, tal que CF=AD. Se traza el segmento GF, y la paralela a él por C. Del haz de rectas que pasa por F, se elige aquella que determine con las rectas BC y la paralela a GF por C, un segmento de longitud igual a AD. Sea esta segmento HK=AD=CF (es decir la concoide de polo F, como directriz la paralela a GF por C, y la distancia AD)



La recta que pasa por K y L corta a AB en el punto M.

Demostraremos a continuacion que AM y CK son las medias proporcionales buscadas.

De la figura se observa que
$(BK)(CK) = (EK + EC)(EK - EC) = EK^2 - EC^2$ y que
$(MA)(MB) = (MD + AD)(MD - AD) = MD^2 - AD^2$.

Por otra parte, por semejanza de los triángulos $\triangle MAL$ y $\triangle LCK$ se tiene:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}$$

Y teniendo en cuenta que $AB = 2AD$ y $GC = 2BC$, obtendremos

$$\frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CK} \Rightarrow \frac{2MA}{AB} = \frac{2BC}{CK}$$

esto es: $\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK}$ y por semejanza de los triángulos $\triangle GFK$ y $\triangle CHK$ se tiene que $\frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}$ de donde $\frac{MA}{AD} = \frac{FH}{HK}$ Pero $HK = AD$ implica que $FH = MA$, y por tanto, FH+HK=MA+AD, es decir MD=FK.

De $(MA)(MB) = (MD + AD)(MD - AD) = MD^2 - AD^2$ se deduce que $MD^2 = (MA)(MB) + AD^2$, y de la figura $FK^2 = EK^2 + EF^2 = EK^2 + (CF^2 - EC^2) = (BK)(CK) + AD^2$. Como $MD = FK$ resulta que $MD^2 - AD^2 = (BK)(CK)$ y por tanto $(BK)(CK) = (MA)(MB)$, de donde

$$\frac{CK}{AM} = \frac{MB}{BK} = \frac{LC}{CK} = \frac{AB}{CK} = \frac{AM}{BC}$$

y, por lo tanto

$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{AM} = \frac{AM}{BC}$$

Con lo que demostramos que CK y AM son las medias proporcionales buscadas.