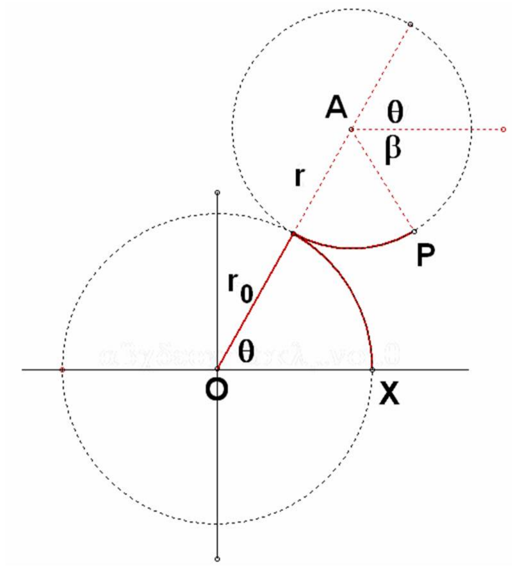
Parametrizando la epicicloide



De la figura se observa que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r_0 + r} \Rightarrow (r_0 + r)\cos(\theta) = x$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r_0 + r} \Rightarrow (r_0 + r)\operatorname{sen}(\theta) = y$$

por tanto las coordenadas del punto A son:

$$A = ((r_0 + r)\cos(\theta), (r_0 + r)\operatorname{sen}(\theta))$$

Ahora bien como el punto P se encuentra en un círculo de radio R podemos parametrizar dicho círculo asi:

$$P \in (\cos\beta, sen\beta)$$

ademas según la figura

$$\angle OAP - \beta + \theta = \pi \Rightarrow \beta = \angle OAP + \theta - \pi$$

también

$$O\widehat{A}P = O\widehat{A}X \Rightarrow \theta \times r_0 = \angle OAP \times r \Rightarrow \frac{\theta \times r_0}{r} = \angle OAP$$

por lo tanto

$$\beta = \frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi \Rightarrow P \in \left(r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi\right), r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow P \in \left(-r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right), -r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

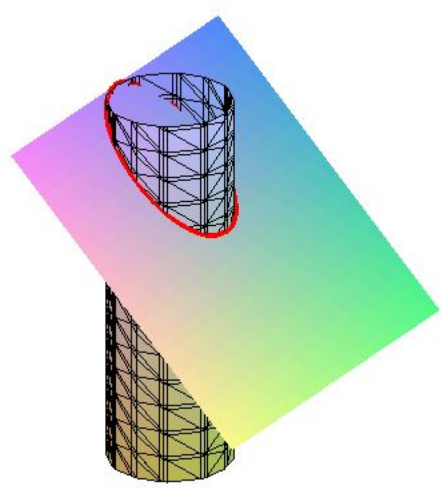
Por lo tanto las coordenadas del punto P desde O son:

$$x = \left((r_0 + r)\cos(\theta) - r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

$$y = \left((r_0 + r)\,\mathrm{sen}(\theta) - r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

Ejemplos de curvas

Determine la curva intersección del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano $y+z = 2$



El cilindro lo podemos parametrizar asi:

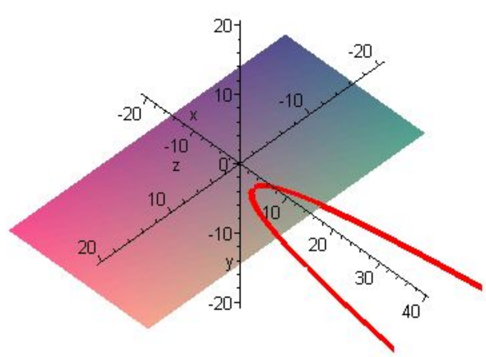
$$x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} t \quad t \in [0, 2\pi]$$

y de la ecuaciòn del plano se tiene

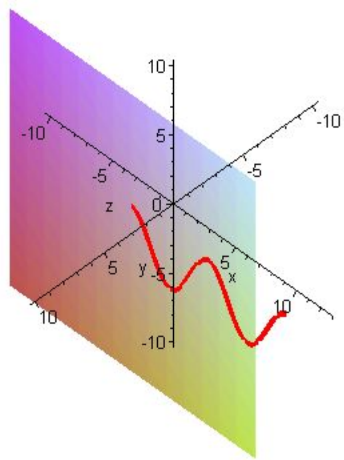
$y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - y \Rightarrow z = 2 - \operatorname{sen} t \quad por \quad tanto \quad c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$

Trazar las curvas

$$x(t) = t - 2, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = -5$$



$$x(t) = 3, \quad y(t) = t, \quad z(t) = 2 * cos(t)$$


10
5
0
-5
-10
-10
-5
5
10
-10
-5
5
10
z
y
x

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

Funciones Vectoriales

Llamaremos función vectorial de variable real o simplemente función vectorial, a aquellas con dominio en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y contradominio en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. De esta manera una función vectorial f asocia a cada elemento t de un conjunto A de números reales, un único vector $f(t)$.
Puesto que $f(t)$ es un punto en el espacio R^n, éste tiene n coordenadas, las cuales son en general, funciones de la variable t. Así podemos escribir

$$f(t) = (x_1(t)), x_2(t)), ..., x_n(t)) \quad \in \mathbb{R}^n$$

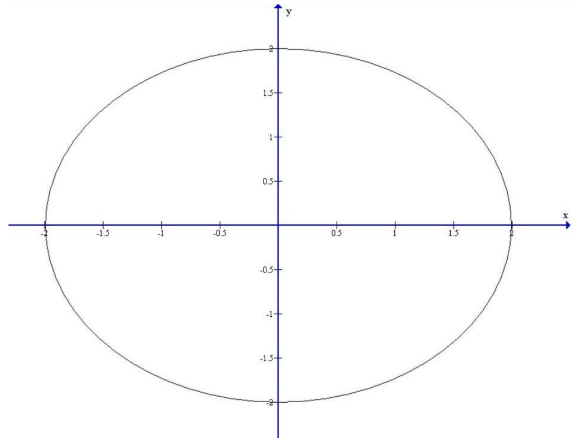
En los cursos de Geometría Analítica, ya han sido consideradas funciones de este tipo, por ejemplo, la ecuación vectorial de una recta L, en el espacio, que pasa por un punto P_0 y que es paralela a un vector $\overrightarrow{a}$, que puede darse en la función

$$L = \{P \,\epsilon\, \mathbb{R}^3 \,|\, P = P_0 + ta,\ t \,\epsilon\, \mathbb{R}\}$$

en donde, si consideramos que P_0 es un punto fijo y a es un vector tambien constante, entonces tenemos que P es una función vectorial del parametro real t, es decir, cada valor de t esta asociado con un punto P de la recta.

Ejemplo.- Si f es la función vectorial por $f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ con $t \,\epsilon\, [0, 2\pi]$, tenemos entonces que f asocia a cada número real t en el intervalo $t \,\epsilon\, [0, 2\pi]$, un par ordenado (x, y) con $x = 2\cos t$ y $y = 2\sin t$, que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio 2 y centro en el origen.

Asi pues la gráfica de f es una circunferencia.



Observemos que cada una de las componentes de una función vectorial es una función real (de variable real) y que las llamadas ecuaciones paramétricas se obtienen presisamente al expresar cada una de las componentes en función del parámetro. Así pues, las ecuaciones paramétricas definen una función vectorial y viceversa una ecuación en dos variables define un lugar geométrico que por lo general, y para nuestro propósito, será una curva plana. Cuando este lugar geometrico se define mediante ecuaciones parametricas y pensando que el punto se mueve sobre la curva conforme el parametro recorre el dominio, tendremos que las ecuaciones paramétricas definiran además, el punto de partida, la rapidez con la que se hace el recorrido, que porción de la curva se considera (variando el dominio) y, si la curva es cerrada, cuantas veces se reccorre. Cada una de las funciones vectoriales que se dan a continuación, define el mismo lugar geométrico o una parte de éste; sin embargo, el sentido, el punto de partida y la rapidez de recorrido así como la porción de la curva que se considera en cada caso varia.

$$f_1(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_3(t) = (2\cos 3t, 2\sin 3t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_4(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, \pi]$$

$$f_5(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 6\pi]$$

$$f_6(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[-\pi, \pi]$$

Para una función vectorial en $\mathbb{R}^3$ decimos que: Si D es un conjunto de $\mathbb{R}$, entonces r es una función vectorial con dominio D si y sólo si, para todo $t\,\epsilon\,D$

$$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

donde f, g y h son funciones escalares con dominio D.

Ejemplo.- Sea $r(t) = (t+2)i + (2t^2 - 3)j + t^3k$ para todo $t\,\epsilon\,\mathbb{R}$ ¿Para que valor de t el vector de posición de $r(t)$ está en uno de los planos?.

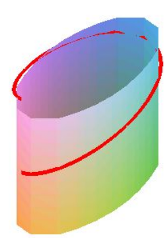
El vector de posición de $r(t)$ está en el plano xy si su componente segun k, o sea t^3, es igual a 0, es decir, $t = 0$, el vector de posición esta en el plano yz si la componente según i que es $t + 2 = 0$ o sea $t = -2$ finalmente, está en el plano xt si $2t^2 - 3 = 0$, es decir, $t = \pm\sqrt{3/2} \approx \pm 1{,}225$..

Ejemplo.- Describa la curva definida por la función vectorial $r(t) = (1+t, 2+5t, -1+6t)$.

Las ecuaciones paramétricas correspondiente son, $x = 1 + t$, $y = 2 + 5t$, $z = 1 + 6t$ o sea $(1, 2, -1) + t(1, 5, 6)$ se trata de una recta que pasa por $(1, 2, -1)$ y es paralela a $(1, 5, 6)$

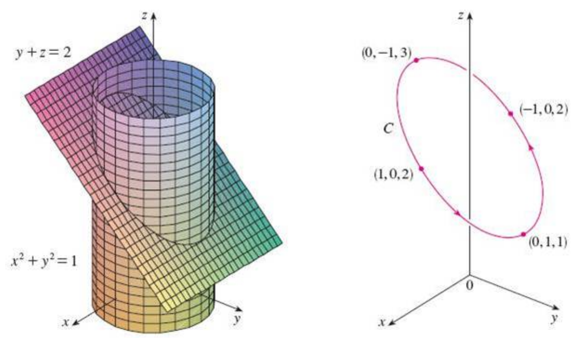
Ejemplo.- Dibuje la curva cuya ecuación vectorial es $r(t) = 2\cos ti + \sin tj + tk$.

Las ecuaciones paramétricas para esta curva son, $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ $x/2 = \cos t$ $\therefore$ $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$ la curva se encuentra en el cilindro elíptico $(\frac{x^2}{4}) + y^2 = 1$. Ya que $z = t$ la curva forma una espiral ascendente alrededor del cilindro conforme t se incrementa



Ejemplo.- Halle una función vectorial que represente la curva de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.

La figura muestra la forma en que se cruzan, el plano y el cilindro, así mismo la figura ilustra la curva de intersección.



La proyección C sobre el plano xy es el circulo $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con base en la ecuacion del plano, tenemos que $z = 2 - y = 2 - \sin t$

$\therefore$ $\quad x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 - \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\therefore$ $\quad$ la ecuación vectorial correspondiente es

$$r(t) = \cos t i + \sin t j + (2 - \sin t)k \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sea

$$f(t) = (x_1(t)), x_2(t)), ..., x_n(t)) \quad \in \mathbb{R}^n$$

entonces el $Dom(f) = \bigcap_{i=1}^{n} x_i(t)$

Ejemplo.-Halle el dominio de la función vectorial $f(t) = (t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$

Sol. tenemos que

$$Si \quad x_1(t) = t^2 \quad entonces \quad Dom(x_1(t)) = \mathbb{R}$$

$$Si \quad x_2(t) = \sqrt{t-1} \quad entonces \quad Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 1\}$$

$$Si \quad x_3(t) = \sqrt{5-t} \quad entonces \quad Dom(x_3(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 5 \geq t\}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap\{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 1 \leq t \leq 5\}$$

Ejemplo.-Halle el dominio de la función vectorial $f(t) = (Ln(t), \frac{t}{t-1}, e^{-t})$
Sol. tenemos que

$$Si \quad x_1(t) = Ln(t) \quad entonces \quad Dom(x_1(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t\}$$

$$Si \quad x_2(t) = \frac{t}{t-1} \quad entonces \quad Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 1 \neq t\}$$

$$Si \quad x_3(t) = e^{-t} \quad entonces \quad Dom(x_3(t)) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap\{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t, \quad t \neq 1\}$$

Una interpretación Física

Cuando una particula se mueve en el espacio durante un intervalo de tiempo I, se pueden considerar las coordenadas de la particula como funciones definidas sobre I: $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ $t \in \mathbb{R}$. Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ conforman la curva en el espacio que llamamos trayectoria de la partícula. Estas ecuaciones parametrizan la curva y el vector $f(t) = \overrightarrow{OP} = (f(t)i + g(t)j + h(t)k)$ del origen a la posición $P((f(t), g(t), h(t)k))$ de la partícula en el tiempo t es el vector de posición de la partícula.
Ejemplo.- La función de posición de una particula en el plano XY es $f(t) = (t+1)i + (t^2 - 1)j$ encuentre una ecuación en x e y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula.
Sol. Tenemos que

$$x = t + 1 \quad y = t^2 - 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow y = x^2 - 2x$$

Algebra de fuunciones vectoriales

Sean $f, g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ entonces definimos las operaciones entre funciones vectoriales asi:

Suma

$$1. - h(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_1(n)) + (g_1(t), g_2(t), ..., g_1(n)) =$$

$$((f_1 + g_1)(t), (f_2 + g_2)(t), ..., (f_n + g_n)(t))$$

Diferencia

$$2. - h(t) = f(t) - g(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_1(n)) - (g_1(t), g_2(t), ..., g_1(n)) =$$

$$((f_1 - g_1)(t), (f_2 - g_2)(t), ..., (f_n - g_n)(t))$$

Producto por un escalar

$$3. - c \cdot f(t) = c \cdot (f_1(t), f_2(t), ..., f_1(n)) = (c \cdot f_1(t), c \cdot f_2(t), ..., c \cdot f_1(n))$$