Introducción

El objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su presición no deberá contener ambiguedades y no habrá duda de que es correcta. Desafortunadamente, muchas desmotraciones que aparecen en libros de texto y artículos de revistas no tienen la claridad necesaria; dicho en otras palabras, las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Por lo tanto, para entender, hacer una demostración o ambas cosas, usted debe aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento.

Proposición

Es una oración o una expresión matemática que afirma o niega algo.

De esta manera, una proposición tiene un valor de verdad que puede ser verdadera o falsa. En estas notas consideraremos solo proposiciones matemáticas.

Ejemplos de proposiciones verdaderas

- 5 es un número impar
- 2 es un número par

Ejemplos de proposiciones falsas

- 14 es un número impar
- 2=5

Ejemplos de expresiones que no son proposiciones

- 73
- 2x+3=5

Generalmente, para referirnos a proposiciones específicas se usan letras mayúsculas. Por ejemplo
P: 25 es un núero entero impar
Q: 3+4=7
Las proposiciones pueden contener variables. Por ejemplo, sea x un número entero y consideremos
P: 2x+1 es un entero impar.
Esta es una proposición que es verdadera no importa que número entero sea la variable x.
Entonces podemos denotarla por
P(x): 2x+1 es un entero impar.
Hay oraciones o expresiones matemáticas que contienen variables y no son proposiciones.
Por ejemplo,
Q(x) : El número entero x es múltiplo de 3.
Solo será una proposición cuando le otorguemos un valor a x. Una expresión como Q(x), cuyo valor de verdad depende de una o más variables, es lo que se llama una expresión abierta.

Proposiciones compuestas

A partir de proposiciones es posible generar otras proposiciones.

Es decir se puede operar con proposiciones y según sea tales operaciones se utilizan ciertos símbolos, llamados conectivos.

Conectivo	Operación	Significado	Notación
$\neg$	Negación	No P o no es cierto que P	$\neg P$
$\wedge$	Conjnución	P y Q	$P \wedge Q$
$\vee$	Disyución	P o Q	$P \vee Q$
$\Rightarrow$	Implicación	Si P entonces Q	$P \Rightarrow Q$
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	P si y solo si Q	$P \Leftrightarrow Q$

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es un método para determinar cuando una proposición es verdadera

Debiendo examinarse todos los posibles valores de verdad de las proposiciones individuales.

Ejemplo 1 Consideremos las siguientes proposiciones

P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par y el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición “P y Q”. Se usa el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra “y”. De esta manera, P$\wedge$Q significa “P y Q”.
La proposición P $\wedge$ Q es verdadera si ambas proposiciones P y Q son verdaderas. En cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 2 Consideremos las siguientes proposiciones

P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par o el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición “P o Q”. Se usa el símbolo $\vee$ para indicar la palabra “o”. De esta manera, P$\vee$Q significa “P o Q”.
La proposición P $\vee$ Q significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene “o” en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 3 Otra manera de obtener nuevas proposiciones a partir de otras es usando la palabra no.
Dada una proposición cualquiera P; podemos formar una nueva proposición no es verdadero que P.
Por ejemplo, si consideramos la proposición (verdadera)
El número entero 3 es impar
podemos formar la nueva proposición No es verdadero que el número entero 3 es impar, la cual evidentemente es falsa.
Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	¬ P
V	F
F	V

Proposiciones codicionales

Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de condicionales. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos formar la nueva proposición Si P; entonces Q. Esta proposición se escribe de manera simbólica como P⇒ Q; la cual también se lee P implica Q. Que la proposición P⇒Q es verdadera significa que si P es verdadera entonces Q también debe ser verdadera (P verdadera obliga a que Q sea verdadera). Una proposición de la forma P⇒Q se conoce como proposición condicional (Q sería verdadera bajo la condición de que P sea verdadera). El significado de P⇒ Q nos dice que la única manera en que la proposición P⇒ Q es falsa es cuando P es verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad para P⇒ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇒ Q
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

La proposición P se llama a menudo hipótesis y el postulado Q conclusión, esto se puede reducir a:
Si P entonces Q
P implica Q
En simbolos matemáticos $P \Rightarrow Q$
Hay entonces cuatro posibles casos a considerar:
1. P es verdadero y Q es verdadero
2. P es verdadero y Q es falso
3. P es falso y Q es verdadeo
4. P es falso y Q es falso

Proposiciones bicondicionales

Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos considerar tanto P$\Rightarrow$ Q como su recíproca Q $\Rightarrow$ P:
En primer lugar, P $\Rightarrow$ Q no es lo mismo que Q $\Rightarrow$ P; pues tienen distinto signifcado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.
Consideremos ahora la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Ésta afrma que tanto P $\Rightarrow$ Q como Q $\Rightarrow$ P son verdaderas.
Se usa el símbolo $\Leftrightarrow$, para expresar este significado. En consecuencia, leemos P $\Leftrightarrow$ Q, P si y solo si Q. Una proposición de la forma P $\Leftrightarrow$ Q se conoce como proposición bicondicional.

Ejemplo Por ejemplo, sea a un número entero fijo y consideremos:
P : a es par,
Q : a es múltiplo de 2.
Entonces:
P $\Rightarrow$ Q : Si a es par, entonces a es múltiplo de 2;
Q $\Rightarrow$ P : Si a es múltiplo de 2; entonces a es par.
Así, tenemos la proposición (que es verdadera)
P $\Leftrightarrow$ Q : a es par, **si y solo si**, a es múltiplo de 2:

Así, la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	(P $\Rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\Leftrightarrow$ P)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalencia Lógica

Dos proposiciones lógicamente equivalentes son dos proposiciones cuyos valores de verdad coinciden línea por línea en una tabla de verdad, y de esta manera tienen el mismo significado.

Ejemplo Las proposiciones P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) son lógicamente equivalentes, como podemos ver en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$\neg$ P	$\neg$Q	(P $\wedge$ Q)	($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)	P $\Leftrightarrow$ Q	(P $\wedge$ Q)$\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Esto se evidencia en la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. La equivalencia lógica de P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) la expresamos de la siguiente manera

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Teorema

Es una proposición matemática que es verdadera, y puede ser (y ha sido)verificada como verdadera.

Ejemplo

Teorema 1. *Existe una infinidad de números primos.*

Lema

Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema.

Ejemplo

Lema 1. *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Corolario

Es un término que se utiliza en matemáticas y en lógica para designar la evidencia de un teorema.

Ejemplo

Corolario 1. *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto, ni más de un obtuso.*

Conjetura

Estas son proposiciones cuya verdad o falsedad aún no ha sido demostrada, pero hay indicios de que son verdaderas.

Ejemplo Cualquier número entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos

Demostración

Es un argumento deductivo para una afirmación matemática