Consideremos las siguientes proposiciones.

Ejemplo 1 Dos rectas diferentes en un plano son paralelas o se cortan sólo en un punto.

Ejemplo 2 1=0.

Ejemplo 3 $3x = 5$ y $y = 1$

Ejemplo 4 x no es > 0.

Ejemplo 5 Existe un ángulo θ tal que $\cos(\theta) = \theta$

Observamos que:
La proposición del ejemplo 1 es siempre verdadera
La proposición del ejemplo 2 es siempre falsa
La proposición del ejemplo 3 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 4 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 5 no es tan obvio que es siempre verdadera.
Por lo tanto, es necesario tener algún método para demostrar que tales proposiciones son verdaderas.

Métodos de demostración

Se aplican cuando se desea deducir una proposición Q a partir de una proposición P que se considera verdadera.

Es decir se aplican para demostrar la veracidad de Q, suponiendo la veracidad de P.
Considerando la hipótesis P verdadera, si la implicación se construye utilizando los métodos de demostración y una sucesión de razonamientos verdaderos, por consecuencia se arribará a una conclusión Q verdadera.

Demostraciones directas

Las demostraciones directas, por lo regular, tratan de demostrar una implicación de la forma $P \Rightarrow Q$.

La estrategia a seguir es encontrar una sucesión finita de pequeñas implicaciones todas ellas verdaderas, partiendo de $p = q_1$ y terminando en $p_n = q$. En cada paso, se pueden usar la hipótesis p y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.

Tautología

Una tautología es una proposición compuesta que siempre tiene valor de verdad

Sin importar el valor de verdad de sus partes constituyentes.

La expresión lógica de este método es la siguiente:

$$p \;\Rightarrow\; q_1$$
$$q_1 \;\Rightarrow\; q_2$$
$$q_2 \;\Rightarrow\; q_3$$
$$\vdots$$
$$q_{n-1} \;\Rightarrow\; q_n$$

con $q_n = q$, y haciendo uso de la tautología, se tiene

$$(p \;\Rightarrow\; q_1) \wedge (q_1 \;\Rightarrow\; q_2) \wedge (q_2 \;\Rightarrow\; q_3) \wedge \cdots \wedge (q_{n-1} \;\Rightarrow\; q_n) \;\Rightarrow\; (p \;\Rightarrow\; q)$$

Ejemplo 1 Si k es un número impar, entonces k^2 es un número impar

Demostración. k es impar entonces $k = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m+1)^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Desarrollando el binomio

$$k^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como la suma de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número impar □

Ejemplo 2 Si k es un número par, entonces k^2 es un número par

Demostración. k es par entonces $k = 2m$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como el producto de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número par □

Ejemplo 3 Si $\sqrt{x^2+1} = x-1$, entonces $x=0$

Demostración.

$$\sqrt{x^2+1} = x-1$$

$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2+1 = (x-1)^2$$

$\Rightarrow$ desarrollando el binomio

$$x^2+1 = x^2+2x+1$$

$\Rightarrow$ simplificando términos semejantes

$$0 = -2x$$

Por lo tanto $x=0$ $\square$

Ejemplo 4 Si m es par y n es impar, entonces $m+n$ es impar

Demostración.

$$\begin{pmatrix} m \ par \\ n \ impar \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m = 2k & k \in \mathbb{Z} \\ n = 2\ell+1 & \ell \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m+n = 2k+2\ell+1, \quad k,\ell \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n = 2(k+\ell)+1, \quad k+\ell \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto m+n es impar $\square$

Demostraciones por Contrarreciproca

Observa la siguiente tabla de verdad

P	Q	P⇒Q	¬ Q	¬ P	¬ Q⇒ ¬ P	
V	V	V	F	F	V	
V	F	F	V	F	F	c
F	V	V	F	V	V	
F	F	V	V	V	V	

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \ \Rightarrow \ Q \ \equiv \ \neg Q \ \Rightarrow \ \neg P$$

es decir se parte de la negación de la conclusión ($\neg Q$) y de ello se deduce la negación de la hipótesis ($\neg P$)

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$

Demostración. Negación de la conclusión

$$B^c \not\subset A^c$$

$\Rightarrow$ por definición de subconjunto

$$\exists \ x \ \in \ B^c, \quad \ni \quad x \ \notin \ A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de complemento

$$\exists \ x \ \in \ A, \quad \ni \quad x \ \notin \ B$$

$\Rightarrow$ por la definición de subconjunto

$$A \not\subset B$$

que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Si A es cualquier conjunto, entonces $A \bigcap A^c = \emptyset$

Demostración. Negación de la conclusión

$$A \bigcap A^c \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$\exists \ x \ \in \ A \bigcap A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de intersección

$$\exists \ x \ \in \ A \ \ y \ \ x \in A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de complemento

$$x \in A \ \ y \ \ x \notin A$$

Por lo tanto A no es un conjunto, que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente:
Si $p,\ q\ \in\ \mathbb{R}^+$ son tal que $\sqrt{pq} \neq \dfrac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$

Demostración. Negación de la conclusión
$$p = q$$
$\Rightarrow$
$$\sqrt{pq} = \sqrt{pp} = p$$
$\Rightarrow$
$$\frac{p+q}{2} = \frac{p+p}{2} = \frac{2p}{2} = p$$
por lo tanto
$$\sqrt{pq} = \frac{p+q}{2}$$
que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente:
Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si k^2 es par, entonces k es par

Demostración. Negación de la conclusión k no es par $\Rightarrow$ k es de la forma
$$2n+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ elevando k al cuadrado
$$k^2 = (2n+1)^2, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ desarrollando el binomio
$$k^2 = 4n^2 + 4n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ factorizando el 2
$$k^2 = 2\underbrace{(2n^2+2n)}_{m\ entero}+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ sumas y productos de enteros es entero
$$k^2 = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}$$
por lo tanto k^2 es impar que es la negación de la hipótesis □