

Demostraciones por Reducción al absurdo

Observa las siguientes tablas de verdad

| | | |
|---|---|-------------------|
| P | Q | P \Rightarrow Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| | | |
|---|---|--------------|
| P | Q | P \wedge Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| | | |
|---|----------|---------------------|
| P | \neg Q | P \wedge \neg Q |
| V | F | F |
| V | V | V |
| F | F | F |
| F | V | F |

| | | |
|---|----------|---------------------|
| W | \neg W | W \wedge \neg W |
| V | F | F |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | V | F |

| | | |
|---------------------|---------------------|---|
| P \wedge \neg Q | W \wedge \neg W | P \wedge \neg Q \Rightarrow W \wedge \neg W |
| F | F | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | V |

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \Rightarrow Q \equiv P \wedge \neg Q \Rightarrow W \wedge \neg W$$

Absurdo

Un absurdo es una proposición que siempre es falsa

Es decir para demostrar $P \Rightarrow Q$ se construye un absurdo $W \wedge \neg W$ usando la hipótesis P y la negación de la conclusión $\neg Q$

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $A \subset B$ y la negación de la conclusión $A - B \neq \emptyset$

$$\underbrace{A \subset B}_P \quad y \quad \underbrace{A - B \neq \emptyset}_{\neg Q}$$

\Rightarrow usando las definiciones

$$\underbrace{\forall x \in A \Rightarrow x \in B}_P \quad y \quad \underbrace{\exists x \in A \quad y \quad x \notin B}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall x \in A \Rightarrow x \in B}_P \quad y \quad \underbrace{\exists x \in A \quad \ni \quad x \notin B}_{\neq Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{\forall x \in A \Rightarrow x \in B}_W \quad y \quad \underbrace{\exists x \in A \quad \ni \quad x \notin B}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si mn es impar, entonces m y n son impares

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis mn es impar y la negación de la conclusión n par ó m par

$$\underbrace{n \cdot m, \text{ impar}}_P \quad y \quad \underbrace{m \text{ par ó } n \text{ par}}_{\neg Q}$$

\Rightarrow usando las definiciones

$$\underbrace{n \cdot m = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad \underbrace{n = 2r, \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{ó} \quad m = 2t, \quad t \in \mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{n \cdot m = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad \underbrace{n \cdot m = 2r \cdot m \quad \text{ó} \quad n \cdot m = n \cdot 2t}_{\neq Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{n \cdot m = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}}_W \quad y \quad \underbrace{n \cdot m = 2r \cdot m \quad \text{ó} \quad n \cdot m = n \cdot 2t}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente: Si $n, m \in \mathbb{Z}$, son tal que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, $n, m \in \mathbb{Z}$ y la negación de la conclusión, n impar

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad \underbrace{n = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

\Rightarrow elevando n al cuadrado

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad n^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2(2t^2 + t) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow elevando n al cubo

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad n^3 = (2t + 1)^3 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1 = 2(4t^3 + 6t^2 + 3) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow sumando n, n^2 y n^3 se tiene

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad n + n^2 + n^3 = (2t + 1) + 2(2t^2 + t) + 1 + 2(4t^3 + 6t^2 + 3) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow simplificando

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad n + n^2 + n^3 = 2(t + 2t^2 + t + 4t^3 + 6t^2 + 3 + 1) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow suma de impares es par

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, m \in \mathbb{Z}}_P \quad y \quad n + n^2 + n^3 = 2(m) + 1, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow el producto $m + m^2 = m(m + 1)$ es par, por lo tanto

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2 = m(m + 1), \quad \text{es par } n, m \in \mathbb{Z}}_W \quad y \quad \underbrace{n + n^2 + n^3 = 2(m) + 1, \quad \text{es impar } m \in \mathbb{Z}}_{-W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente: $\forall a \neq 0$ se tiene que $a^2 > 0$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a \neq 0$ y la negación de la conclusión $a^2 \leq 0$

$$\underbrace{a \neq 0}_P \quad y \quad \underbrace{a^2 = a \cdot a \leq 0}_{-Q}$$

\Rightarrow

$$\underbrace{a \neq 0}_W \quad y \quad \underbrace{a = 0}_{-W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 5 Demostrar lo siguiente: Si $a > 1$, entonces $a < a^2$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a > 1$ y la negación de la conclusión $a^2 \leq a$

$$\underbrace{a > 1}_P \quad y \quad \underbrace{a^2 \leq a}_{-Q}$$

\Rightarrow

$$\underbrace{a > 1}_P \quad y \quad \underbrace{a - a^2 \geq 0}_{-Q}$$

\Rightarrow

$$\underbrace{a > 1}_P \quad y \quad \underbrace{a(1 - a) \geq 0}_{-Q}$$

\Rightarrow

$$\underbrace{a > 1}_P \quad y \quad \underbrace{a \geq 0 \quad y \quad 1 - a \geq 0}_{-Q}$$

por lo tanto

$$\underbrace{a > 1}_W \quad y \quad \underbrace{a \leq 1}_{-W}$$

esto es un absurdo □

Demostraciones por casos

Éste método es posible utilizarlo cuando la hipótesis P es una disyunción de casos, es decir, cuando

$$P = P_1 \text{ ó } P_2 \text{ ó } P_3 \cdots \text{ ó } P_n$$

Éste método está basado en la equivalencia

$$P \Rightarrow Q \equiv (P_1 \Rightarrow Q \wedge P_2 \Rightarrow Q \wedge P_3 \Rightarrow Q \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q)$$

Éste método se explica señalando que para demostrar $P \Rightarrow Q$, es necesario demostrar que todos los casos de la hipótesis implican la conclusión

Ejemplo 1 Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n + 1$ es impar

Demostración. Caso 1

n par $\Rightarrow n^2$ es par $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar

Caso 2

n impar $\Rightarrow n^2$ es impar $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar □

Ejemplo 2 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \geq 0$

Demostración.

Definición 1.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$$

Caso 2

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0 \Rightarrow |a| \geq 0$$
□

Ejemplo 3 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = |-a|$

Demostración.

Definición 2. Se tiene

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

por otro lado

$$a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0 \Rightarrow |-a| = -(-a) = a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

Caso 2

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

por otro lado

$$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow |-a| = -a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

□

Demostraciones por contraejemplo

El método por contraejemplo se aplica de manera muy particular para demostrar la falsedad de proposiciones cuya hipótesis está construida mediante un cuantificador universal. Esto es, se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para todos los elementos de un cierto conjunto.

Qué entender por un contraejemplo.

Para demostrar la falsedad de proposiciones de este tipo, basta exhibir un elemento que satisfaga la hipótesis de la proposición, pero que no satisfaga su conclusión. A dicho elemento se le conoce con el nombre de contraejemplo. El uso del contraejemplo, es muy útil cuando uno se encuentra ante una proposición con cuantificador universal, de la cuál no se sabe si es verdadera o falsa.

La primera idea es buscar un contraejemplo. Si no se encuentra en una primera instancia, se intentará demostrar su veracidad aplicando los otros métodos o una combinación de ellos.

Ejemplo 1 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a + b| = |a| + |b|$$

Demostración. Si tomamos $a = 5$ y $b = -3$ se tiene

$$|5 - 3| = |2| = 2 \neq 8 = 5 + 3 = |5| + |-3|$$

por lo tanto la proposición es falsa

□

Ejemplo 2 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

Demostración. Si tomamos $a = -$ y $b = 2$ se tiene

$$a^2 = 4 = b^2$$

pero

$$-2 = a \neq 2 = b$$

por lo tanto la proposición es falsa

□

Ejemplo 3 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$A - B = B - A, \quad \forall A, B \text{ conjuntos}$$

Demostración. Si tomamos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad y \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

se tiene que

$$A - B = \{1, 2\} \neq \{6, 7\} = B - A$$

por lo tanto la proposición es falsa

□

Observaciones: No obstante que puede haber muchos casos en los que si se satisfaga la proposición, basta con un solo caso en el que no ocurra, para que tal proposición sea falsa.